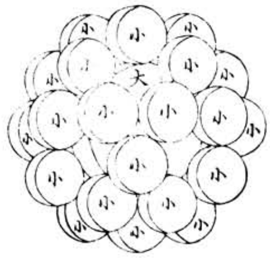
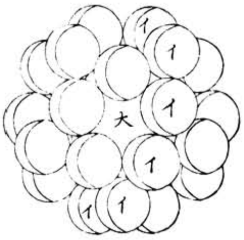
「算法助術」十九ノオ　の問題

天保１２年：西暦１８４１

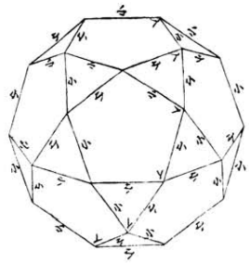
今、小球 30 個を以て図のごとく大球を囲む有り。小球は各々球 4 個と大球とに接して隣す。小球の径 305 寸たらば、問う、大球の径、幾何（いくばく）ぞと。



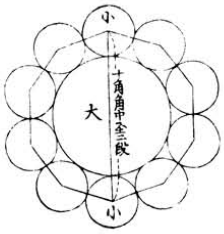


答えて曰く、大球の径 682.000 寸余り有りと。
題図は小球３個相合う所を正面に見る図なり。又、5 個相合う所を正面に見るときは左のごとし。

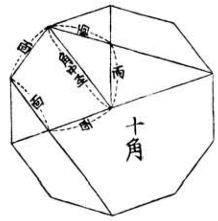
小球各々心より心に至るときは、五角 12 個三角 20 個相交わる切籠の形となる右図のごとし。



上図イ印の小球各々心に随う大球共に切るときは、その切面すなわち小円 10 個をもって大円を囲む形となる左図のごとし。

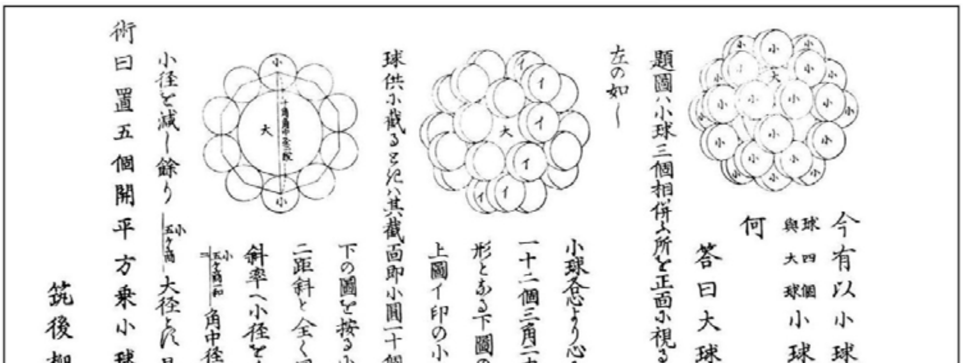


右の図を考えるに、十角の角中径は五角の二距斜と全く同じ。故に、助術第三の二距斜率へ小径を乗じ角中径とす。$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ は角中径なり。これを倍して内小径を減じ余り $\sqrt{5}$ 大径とす。是（これ）によりて、答術下のごとし。



術曰く、五個を置き平方にて開き小球径を乗じ、大球径を得（う）、問いに合う。

筑後柳河　大藪俵助茂利撰


今有以小球三十個如圖圍大球各小球者球四個與大球切鄰小球徑三百零五寸問大球徑幾何

答曰大球徑六百八十二寸〇〇〇有奇

題圖ハ小球三個相併ふ所を正面ふ視る圖なり又五個相併ふ所を正面ふ視るときハ左の如し

小球各心より心ふ至るときハ五角十二個三角二十個相交る切籠の形となる下圖の如し

上圖イ印の小球各心ふ随ふ大球供ふ截るときハ其截面即小圓一十個を以て大圓を圍む形となる左圖の如し

下の圖を按るふ十角の角中径ハ五角の二距斜と全く同し故助術第三の二距斜率へ小径を乗し角中径とす 小五分角和 ハ角中径なり是を倍して内小径を減し餘り 小五分角 大径とす是ふ依て答術左の如し

術曰置五個開平方乗小球徑得大球徑合問

筑後柳河　大藪俵助茂利撰


長谷川善左衛門弘閲
山本安之進賀前編
算法助術
江戸中橋廣小路町　西宮彌兵衛板

三十個の球の外接問題
算法助術（天保十二年）

※この訳は、松本千賀子さんの力を借りて作成しました。

小球の径は305寸となっている。小球が直径約9mというのは模型としていかにも大きく異様であることに加え，大球の径を682.000とほぼ整数値になるような値で出題をしている。これは現代風の表現をとれば，さしずめ $\dfrac{682}{305}$ は，$\sqrt{5}$ の良い有理数近似であることを主張していると思われる。

そして，この疑問が・・・精度の良い有理数近似は，どのようにして求めたのだろうか。

［説明］ $x=\sqrt{5}$ とすると，$x-2=\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$ となるので，$x=2+\dfrac{1}{2+x}$ を得るので，

$$x-2=\frac{1}{2+x}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+x}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+x}}}=\cdots\cdots\cdots=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4\cdots}}}}=\cdots\cdots\cdots$$

という式の列（連分数形の式の列）を得る。

ところで，$0<\dfrac{1}{2+x}<\dfrac{1}{2}<1$ なので，各段階で $\dfrac{1}{2+x}$ を0と置き、次の近似値の列を得る。

$$x_1-2=\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad x_1=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}=2.25$$

$$x_2-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}=\frac{4}{17} \quad\rightarrow\quad x_2=2+\frac{4}{17}=\frac{38}{17}=2.235294\cdots$$

$$x_3-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{4}{17}}=\frac{17}{72} \quad\rightarrow\quad x_3=2+\frac{17}{72}=\frac{161}{72}=2.236111\cdots$$

$$x_4-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{17}{72}}=\frac{72}{305} \quad\rightarrow\quad x_4=2+\frac{72}{305}=\frac{682}{305}=2.236065573\cdots$$

$$x_5-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{72}{305}}=\frac{305}{1292} \quad\rightarrow\quad x_5=2+\frac{305}{1292}=\frac{2889}{1292}=2.236068111\cdots$$

このようなアイデアで，２つの整数305と682を用いて $\sqrt{5}$ の有理数近似の問題を作題したのではないだろうか。実際に誤差は，

$$\sqrt{5}-x_4=2.236067977-2.236065573=0.00000240<10^{-5}$$

$$x_5-\sqrt{5}=2.236068111-2.236067977=0.00000013<10^{-6}$$

であり，実用上の問題が起こらない精度で値を得ている。さらに，x_4 と比較して x_5 はそれほど精度が変わらないので，$x_4={}^{682}\!/_{305}$ をこの問題の数値に採用したのではないだろうか。

さて，ここで少し話の筋を変えて，無理数による有理数で近似の性質を見て見よう。

定理１　完全平方でない正整数Dと大きな整数Y対して、次の条件を満たす整数x, yが存在する。

$$\left|x-y\sqrt{D}\right|<\frac{1}{Y} \quad , \quad 0<y\le Y$$

［証明］　ある大きな整数Yに対して，次のような$Y+1$個の実数の集合Sを考える。

$$S=\left\{0\sqrt{D},1\sqrt{D},2\sqrt{D},3\sqrt{D},\cdots,Y\sqrt{D}\right\}$$

そして，各実数$k\sqrt{D}$ $\left(k=0,1,2,\cdots,Y\right)$に対して、整数部分$N_k$と小数部分$F_k$に分ける。つまり，

$$k\sqrt{D}=N_k+F_k \quad \left(N_k\in Z\ ,\ 0\le F_k<1\right)$$

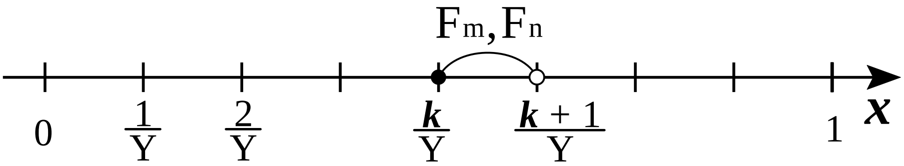
とする。そして，その小数部分全体の集合Φを考える。つまり，

$$\Phi=\left\{F_0,F_1,F_2,F_3,\cdots,F_Y\right\}$$

とすると，$n\left(\Phi\right)=Y+1$となる。（補足説明６参照のこと）

半開区間$\left[0,1\right)$を，長さ$\frac{1}{Y}$のY個の半開区間$I_k=\left[\frac{k}{Y},\frac{k+1}{Y}\right)\left(k=0,1,2,\cdots,Y-1\right)$に分ける。

すると，Y個の区間内に，集合Φの要素は$Y+1$個存在しているので，どこかの半開区間I_kには必ず小



数部分が２つ以上の存在している。つまり，ある整数m, n $\left(0\le m<n\le Y\right)$があり，$F_m$と$F_n$は同じ半開区間$I_k=\left[\frac{k}{Y},\frac{k+1}{Y}\right)$に属している。したがって, 区間$I_k$の長さを考えると$\left|F_n-F_m\right|<\frac{1}{Y}$である。

したがって，

$$\left|\left(n\sqrt{D}-N_n\right)-\left(m\sqrt{D}-N_m\right)\right|<\frac{1}{Y}$$

$$\left|\ \left(N_n-N_m\right)-\left(n-m\right)\sqrt{D}\ \right|<\frac{1}{Y}$$

ここで，$x=N_n-N_m$，$y=n-m\ \left(>0\right)$とおけば，x, yは共に整数で，$0<y=n-m\le n\le Y$である。

故に，$\left|x-y\sqrt{D}\right|<\frac{1}{Y}$，$0<y\le Y$を満たす整数$x$, yは存在する。　　　　　［証明終わり］

定理２　完全平方でない正整数Dに対して、次の条件を満たす整数の組$(x,\ y)$が無数に存在する。

$$\left|x-y\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y}$$

［**証明**］　定理１で整数x,yを固定したままYを大きくしていくと，不等式は成り立たなくなる。そこで、新たに整数x,yをとりなおす。$\dfrac{1}{Y}\leq\dfrac{1}{y}$であるので、この作業を続ければよい。［**証明終わり**］

系３　完全平方でない正整数Dに対して、次の条件を満たす整数の組$(x,\ y)$が無数に存在する。

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y^2}$$

以上の議論を無理数$\sqrt{D}$の代わりに、任意の無理数αに適用すれば、次の系４を得る。

系４　任意の無理数αに対して、次の条件を満たす整数の組$(x,\ y)$が無数に存在する。

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha\right|<\frac{1}{y^2}$$

系３および４は、有理数$\dfrac{x}{y}$が無理数αの近似であることを示している。しかも，近似有理数の分母の自乗分の１という精度での近似が可能であり、必要に応じてその精度をあげることができる。このことは小数による近似がその小数以下の有効数字桁数に依存していることと比べると、良い性質である。

最初にでできた$\sqrt{5}$の有理数近似が，系３の不等式を満たしている有理数かを確認してみよう。

表５（表中の第２列と第３列の添数は、小数点以下初めに続く０の個数）

近似有理数x_n	$\left\lvert x_n-\sqrt{5}\right\rvert$	分母の自乗分の１の値
$x_1=9/4=2.25$	0.01393202_{1}	$1/16=0.0625_{1}$
$x_2=38/17=2.2352941\cdots$	0.00077385_{3}	$1/289=0.00346020761\cdots_{2}$
$x_3=161/72=2.2361111111\cdots$	0.00004313_{4}	$1/5184=0.000192901234567\cdots_{3}$
$x_4=682/305=2.236065573\cdots$	0.00000240_{5}	$1/93025=0.000010749798441\cdots_{4}$
$x_5=2889/1292=2.23606811\cdots$	0.00000013_{6}	$1/1669264=0.0000005990664\cdots_{6}$

［補足］　実は、初めに求めた連分数展開で求まる無理数の有理数近似と、系３の有理数$\frac{x}{y}$は密接な関係が認められるのである。またの機会にでも…

補足説明６　集合$\Phi=\{F_0,F_1,F_2,F_3,\cdots,F_Y\}$の要素は全て異なる。$n(\Phi)=Y+1$である。

［証明］　$F_k=F_l \Rightarrow k=l$　を示せばよい。

$F_k=F_l$より，$k\sqrt{D}-N_k=l\sqrt{D}-N_l$となり，$(k-l)\sqrt{D}=N_l-N_k$を得る。

今、$k\neq l$とすると、$\sqrt{D}=\dfrac{N_l-N_k}{k-l}$とできる。

ところで，この等式の左辺は無理数、右辺は有理数である。これは，矛盾。よって、$k=l$である。
故に、$n(\Phi)=Y+1$となる。　［証明終わり］

この証明の中で、左辺$\sqrt{D}$を無理数としているが、これについては次の補足説明７を参照のこと。

補足説明７　完全平方でない正整数Dに対して、$\sqrt{D}$は無理数である。

［準備］　pが素数ならば，$\sqrt{p}$は無理数であることを，背理法で示す。

$\sqrt{p}$を有理数と仮定すると，　$\sqrt{p}=\dfrac{y}{x}$（x,yは正の整数）とおける。これから，

$$y^2=p\cdot x^2$$

となる。

ここで，両辺を素因数分解し，素数pの指数を数えると，左辺は偶数であるが，
右辺は奇数である。これは，素因数分解の一意性に矛盾する。　［準備終わり］

［証明］

Dの条件から，Dの素因数pでその指数が奇数のものが存在する。

$$\sqrt{D}=\frac{y}{x}\quad（x,y\text{は正の整数}）$$

とおけば，

$$y^2=D\cdot x^2$$

となる。

上の準備と同様に，素数pの指数を数えると矛盾する。　［証明終わり］

春日井東高校　堀部和経　（２０１１／６）２０１２／１０改