２になる値

[0]

$$2=1+1=3-1=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\sqrt{4}=\sqrt[3]{8}=1.\dot{9}=\cdots$$

２を表す方法はいろいろあります。
上記だけでなく、二、Ⅱ、ふたつ、ｔｗｏ、ｄｉ、まだまだ、いろいろありますね。まあ、これは数学というより、これは文化？
また、進法を変えて、二進法では、１０（二）などもそうですね。
以下、いろいろな「２」を見ていきましょう。

$1.\dot{9}$ も無限等比級数ですが、よくある、次の例を見てみましょう。

[Ⅰ]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n} \qquad =1.\dot{1}_{(二)}$$

解）　有限和 $S_n=\sum_{k=0}^{n}2^{-k}$ を考える。

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}2^{-k}=\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}=2\{1-(1/2)^{n+1}\}$$

であるので、$n\to\infty$ のとき、$S_n\to 2$ となる。

[Ⅱ]

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

（解説）「･･･」が不明確なので、数列の漸化式で表す。

$$a_1=\sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \qquad (\forall n\geq 1)$$

となる。この数列 $\{a_n\}$ の極限を求める。

解）まず、すべての n に対して、$a_n>0$ に注意し、次の（１),（２）に分けて考察する。

（１）　数列 $\{a_n\}$ は単調増加でり、$a_n<2$ 　$(\forall n\geq 1)$ を示す。

すべての n に対して、

$$a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 = \sqrt{2+a_n}^{\,2} - a_n{}^2 = 2 + a_n - a_n{}^2 = -(a_n+1)(a_n-2)$$

である。数学的帰納法で示す。

今 $a_1 = \sqrt{2} < 2$ であるので、

$$a_2{}^2 - a_1{}^2 = -(a_1+1)(a_1-2) > 0$$

$$a_2{}^2 = 2 + \sqrt{2} < 2 + 2 = 4$$

よって、

$$a_1 < a_2 < 2$$

さて、$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2$ を仮定する。

$$a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 = -(a_n+1)(a_n-2) > 0$$

$$a_{n+1}{}^2 = 2 + a_n < 2 + 2 = 4$$

よって、

$$a_n < a_{n+1} < 2$$

となり、

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < 2$$

を得る。よって、数列｛a_n｝は単調増加でり、$a_n < 2$　（$\forall n \geq 1$）を得る。

（２）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$　を示す。

$$4 - a_{n+1}{}^2 = 4 - \sqrt{2+a_n}^{\,2} = 2 - a_n$$

$$(2 - a_{n+1})(2 + a_{n+1}) = 2 - a_n$$

$$2 - a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_{n+1}}(2 - a_n) < \frac{1}{2}(2 - a_n)$$

よって、

$$0 < 2 - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2 - a_1) \cdots\cdots\cdots \text{（A）}$$

$n \to \infty$ のとき、（A）の右辺は 0 に収束するので、$2 - a_n$ も 0 に収束する。

以上（１),（２）により、$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}$ である。

［Ⅲ］

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}}$$

解）　指数部分が不明確なので、漸化式で正確に表すと、

$$a_1=\sqrt{2}\quad,\quad a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}\qquad(\forall n\geq 1)$$

となる。次の漸化式は、似ているが違うので注意が必要、

$$a_1=\sqrt{2}\quad,\quad a_{n+1}={a_n}^{\sqrt{2}}\qquad(\forall n\geq 1)\cdots\cdots\cdots(※)$$

さて、次の（１）,（２）に分けて値を求める。

（１）　数列｛a_n｝は単調増加でり、$a_n<2$　（$\forall n\geq 1$）を示す。

［証明］数学的帰納法で示す。

$$1<a_1=\sqrt{2}<2$$

であるので、

$$\sqrt{2}^1<\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<\sqrt{2}^2$$

したがって、

$$a_1<a_2<2$$

さて、$a_1<a_2<\cdots<a_n<2$ と仮定する。

$$a_{n=}\sqrt{2}^{a_{n-1}}<\sqrt{2}^{a_n}=a_{n+1}$$

また、

$$a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}<\sqrt{2}^2=2$$

以上より、

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots<2$$

［証終］

さて、次に

（２）　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$　を示す。

［証明］関数 $y=\sqrt{2}^x$ を考える。すると、$y'=\sqrt{2}^x\cdot\log\sqrt{2}$ となる、平均値の定理を用いて、次の条件をみたす α が存在する。

$$a_n<\alpha<2\quad,\qquad\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}=\frac{\sqrt{2}^2-\sqrt{2}^{a_n}}{2-a_n}=\sqrt{2}^{\alpha}\log\sqrt{2}$$

したがって、

$$\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}=\sqrt{2}^{\alpha}\log\sqrt{2}<\sqrt{2}^2\log\sqrt{2}=\log 2$$

ゆえに、

$$|2-a_{n+1}|<|2-a_n|\cdot\log 2$$

となり、

$$|2-a_n|<|2-a_1|\cdot(\log 2)^{n-1}\cdots\cdots\cdots（A）$$

を得る。今、$0<\log 2<\log e=1$ であるので、

$n\to\infty$ のとき、（A）の右辺は 0 に収束し、当然左辺も 0 に収束する。

よって、　$\lim_{n\to\infty} a_n=2$　が示された。

以上（1），（2）により、$2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}}$ である。

注意（※）$a_1=\sqrt{2}$　，$a_{n+1}=a_n^{\sqrt{2}}$　（$\forall n\geq 1$）　を考える。

$$a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

$$a_3=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}=\sqrt{2}^2=2$$

$$a_4=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^3}$$

$$a_5=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}^3}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^4}=\sqrt{2}^4=4$$

よって、$a_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{(n-1)}}$ である。

春日井東高等学校　堀部和経（ほりべかずのり）