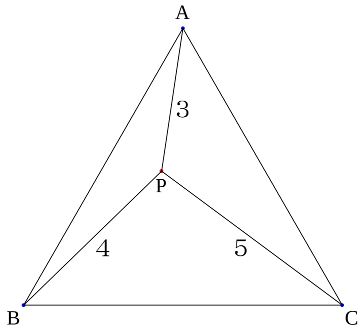
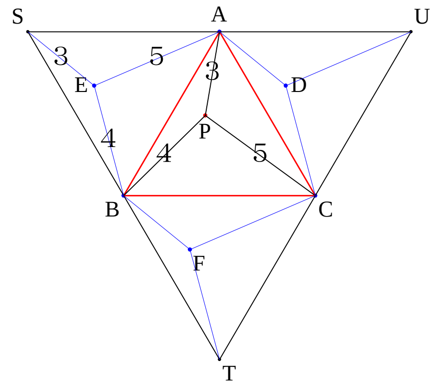
ある正三角形の面積は？



［Ｉ］　正三角形ＡＢＣの内部に点Ｐがあり、
　　ＰＡ＝３，ＰＢ＝４，ＰＣ＝５
である。このとき、正三角形ＡＢＣの面積を求めよ。

（解答）
正三角形ＡＢＣと合同な正三角形３つを３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡに一致させ、図のように書き加える。このとき、
　ＡＰ＝ＳＥ＝ＢＦ＝ＡＤ＝３
　ＢＰ＝ＢＥ＝ＴＦ＝ＣＤ＝４
　ＣＰ＝ＡＥ＝ＣＦ＝ＵＤ＝５
となるように点Ｄ，Ｅ，Ｆをとる。

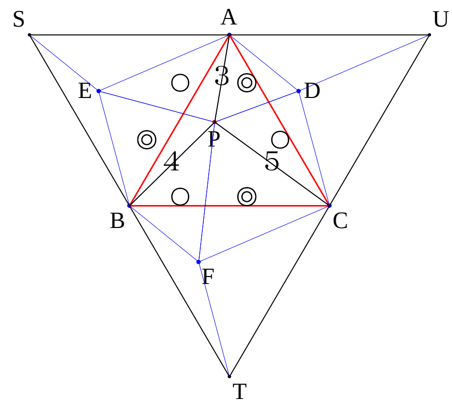


　すると、点Ｐと点Ｄは、点Ａを中心に６０°回転した、位置になっている。つまり、
　　　　∠ＰＡＤ＝６０°
　また、
　　　　ＡＰ＝ＡＤ
なので、三角形ＢＰＱは正三角形となる。同様に三角形ＣＰＲ，ＡＰＳも正三角形となる。（図では、◎印で表している。）

　また、三角形ＡＰＥは各辺の長さが３，４，５の直角三角形（〇印）となる。同様に、長さを比べて、
　　　　△ＡＰＥ≡△ＦＢＰ≡△ＰＤＣ
である。したがって、
　六角形ＡＥＢＦＣＤ
　＝△ＰＡＤ＋△ＰＢＥ＋△ＰＣＦ＋３×△ＡＰＱ

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^2+4^2+5^2\right)+3\times\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$$

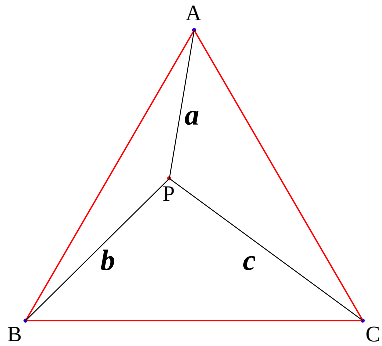
$$=18+\frac{25\sqrt{3}}{2}$$



　さて、△ＡＢＣの面積の２倍が六角形ＡＥＢＦＣＤの面積なので、

$$\triangle ABC=9+\frac{25\sqrt{3}}{4}$$

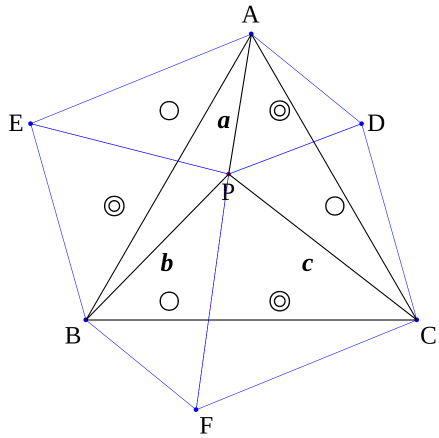
ヘロンの公式を使えば・・・



［Ⅱ］　正三角形ＡＢＣの内部に点Ｐがあり、

　ＰＡ＝a，ＰＢ＝b，ＰＣ＝c

である。このとき、正三角形ＡＢＣの面積を求めよ。



（解答）
正三角形ＡＢＣと合同な正三角形３つを３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡに一致させ、①の図と同じように書き加える。このとき、

　ＡＰ＝ＳＥ＝ＢＦ＝ＡＤ＝a

　ＢＰ＝ＢＥ＝ＴＦ＝ＣＤ＝b

　ＣＰ＝ＡＥ＝ＣＦ＝ＵＤ＝c

となるように点Ｄ，Ｅ，Ｆをとる。

つまり、$3,4,5$ を a,b,c に読みかえればよい。

六角形ＡＥＢＦＣＤ

＝△ＰＡＤ＋△ＰＢＥ＋△ＰＣＦ＋３×△ＡＰＱ

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$（但し、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$）

同じく、△ＡＢＣの面積の２倍が六角形ＡＱＢＲＣＳの面積なので、

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

点Ｐは、△ＡＢＣの内部でなくてはならないのか？

［Ⅲ］　点Ｐが△ＡＢＣの内部であろうと、外部であろうと、一辺のの大きさが、それぞれ a,b,c の３つの正三角形の面積の合計 S_1 と、３辺が a,b,c である三角形３つの面積の和 S_2 との和が６角形の面積となる。（注意：凸でない図形は通常多角形と呼ばない。）つまり、

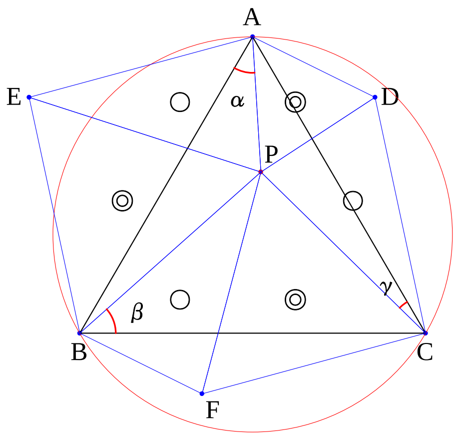
$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$S_2=3\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

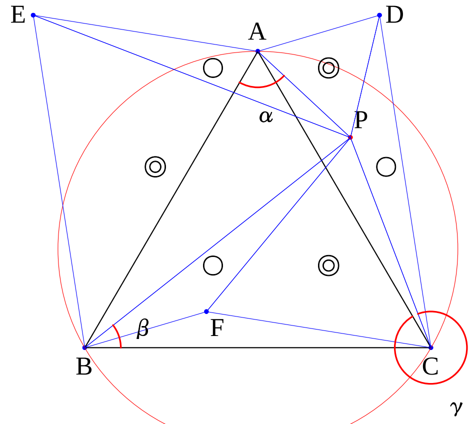
とおけば、

$$S=(S_1+S_2)/2$$

となる。

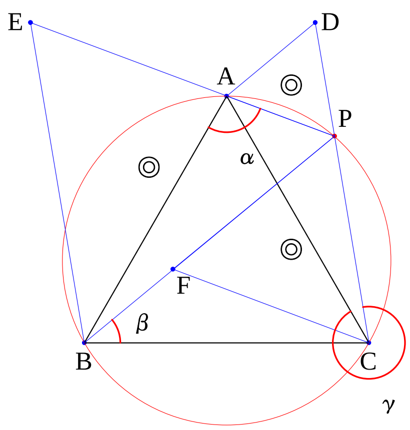


点Ｐが内部の時の図

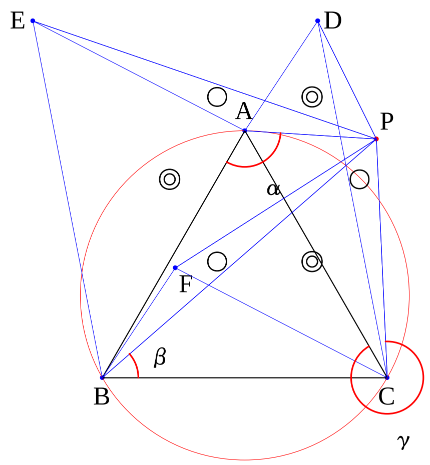


点Ｐが外部の時の図

・・・・・・・・・と、言いたいところだが、点Ｐが三角形ＡＢＣの外接円の周上にある場合と、外部であるときの図を見てみよう。



点Ｐが△ＡＢＣの外接円上にある時の図



点Ｐが△ＡＢＣの外接円の外にある時の図

左の図では、３辺が a,b,c である三角形がつぶれている。右の図ではその三角形が正三角形の部分に重なるので、その分を差し引かなくてはならない。つまり、

$$S=(S_1-S_2)/2$$

となる。以上まとめて、

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right)\pm\frac{3}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし、点Ｐが△ＡＢＣの外接円の内側の場合･･･［＋］
点Ｐが△ＡＢＣの外接円の外側の場合･･･［－］

外接円の内側と外側で符号変化する理由（具体的）

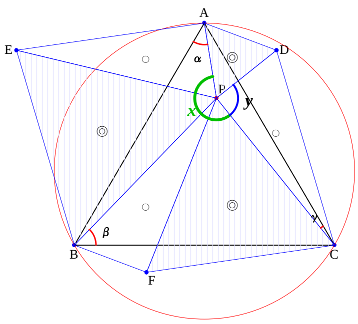
【用語の定義】

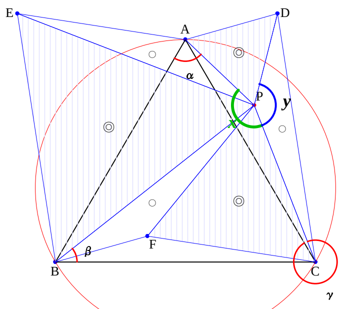
３つの正三角形とは、１辺がおのおの a,b,c である３つの正三角形のことを示し、

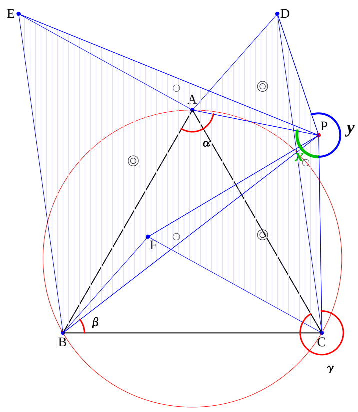
３つの細長い三角形とは、３辺が a,b,c である三角形３個のことを示すものとする。

［Ⅳ］　点Ｐがの位置が△ＡＢＣの外接円の内側と外側で符号変化する理由

３つの正三角形と３つの細長い三角形が重なり合う場合を考察する。点Ｐが正三角形ＡＢＣから遠ざかっていくと、具体的に図の角 y が、$180^\circ < y$ となるときである。当然、別の方向に遠ざかる場合もあるが、ここでは２点Ａ，Ｃと点Ｐで作る角について考察する。







$y \leq 180^\circ$ の場合その１　　$y \leq 180^\circ$ の場合その２　　$180^\circ < y$ の場合

（注意）：角 α，β，γ は、回転の向きも考慮に入れた角を用いている。
例えば、有効線分ＡＢをＡＰに重ねる角度を、α と置いている。
中図と右図では当然 γ は負の値を取る。図では大きな角で表示されている

場合分けの境界が、△ＡＢＣの外接円になる理由

$$y = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - \gamma - 60^\circ = 60^\circ + \alpha - \gamma$$

であるので、これを $180^\circ < y$ に代入すると、

$$120^\circ < \alpha - \gamma \cdots\cdots\cdots（１）$$

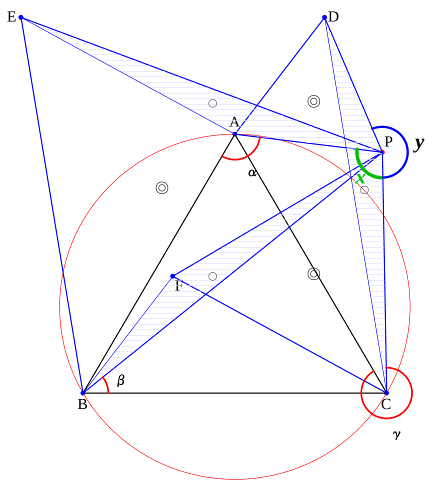
また、$x + y = 300^\circ$ であるので、

$$\alpha - \gamma = 240^\circ - x$$

となり（１）から、

$$x < 120^\circ$$

これは、点Ｐが、（中心角 120° の）弧ＡＣの外側



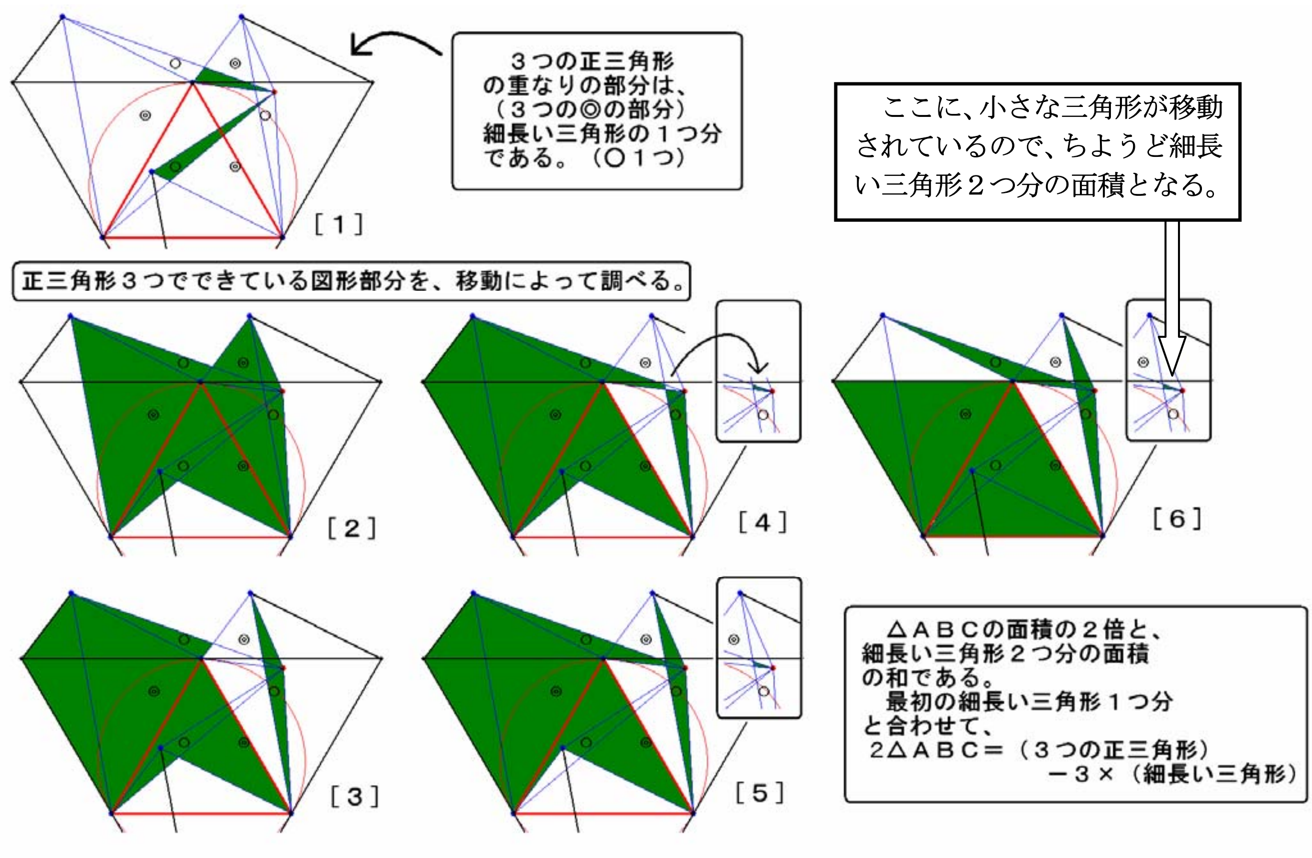
に存在している事を示している。同様に、残りの２つの弧に対しても当てはまるので、△ＡＢＣの外接円の外側に点Ｐが存在する。

（具体的な説明）

点Ｐが正三角形ＡＢＣの外接円の外側にある場合、なぜ、

（正三角形ＡＢＣの面積）＝（３つの正三角形の面積）－（３つの細長い三角形の面積）

なのかを、図で説明する。



［１］３つの正三角形の面積を合計すると、もうそれ自体で重なり合いがあり、その範囲の面積ではない。その分は、細長い三角形１つ分である。

［２］から［６］の図は、色で示してあるように、図形の移動を行うことによって、（３つの正三角形の外側のシルエットの表す面積）と、正三角形ＡＢＣの面積の２倍とのずれを示している。

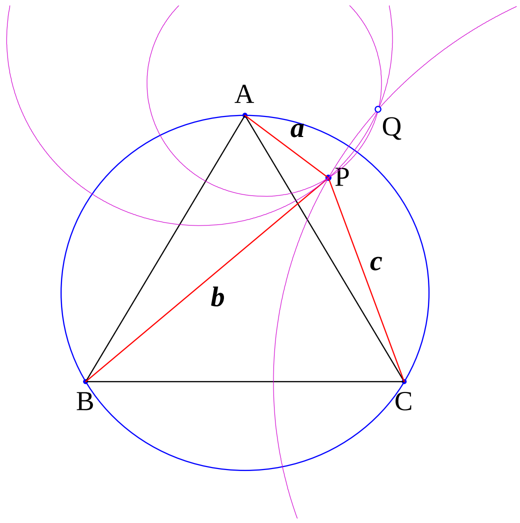
最初に細長い三角形１つ分、そして後から２つ分の面積が余分に計算されているので、

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{3}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

を得る。

３つの値a,b,cだけから内部か外部か判別できないのか？

［Ⅴ］　結論・・・できない。



正三角形ＡＢＣと点Ｐが存在し、ＰＡ＝a，ＰＢ＝b，ＰＣ＝cとなれば、ＰＡ：ＰＢ＝$a:b$、ＰＢ：ＰＣ＝$b:c$、ＰＣ：ＰＡ＝$c:a$となる３つのアポロニウスの円の交点がもう１つある（点Q)。

したがって、ＰＡ＝a，ＰＢ＝b，ＰＣ＝cの条件だけでは、正三角形ＡＢＣの大きさは、２つ存在する。

ということで、次の問題と、それに対応する解答は次のようになる。

（問題）

正三角形ＡＢＣと点Ｐがあり、ＰＡ＝a，ＰＢ＝b，ＰＣ＝cである。

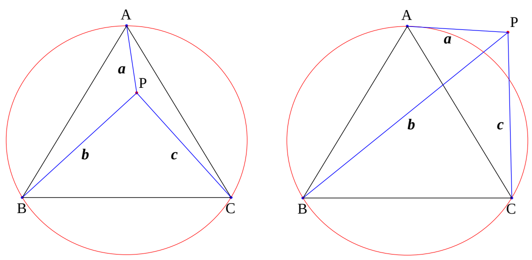
このとき、正三角形ＡＢＣの面積を求めよ。

（解答）

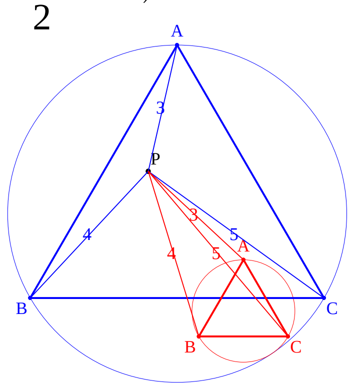
点Ｐが、三角形ＡＢＣの外接円の内側と外側に存在する２つの場合があるので

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right)\pm\frac{3}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

（但し、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$　）



a,b,cが与えられた時、点Ｐの位置の概念図



3,4,5に対する正三角形ＡＢＣの大きさの比較（点Ｐを固定）