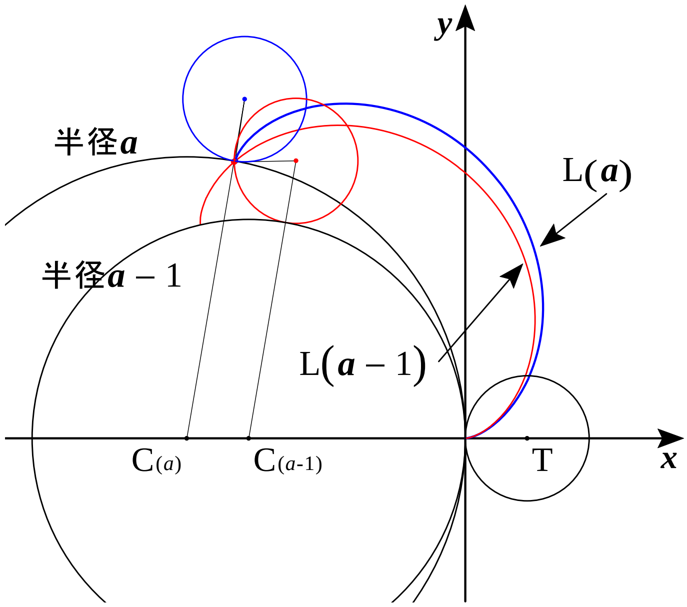
外サイクロイドの交点について

定理



原点で y 軸に接する半径 a の定円 $C(a)$ に、同じく原点で y 軸に点Ｐで接している。その動円Ｔが定円の外側を滑らないで１回転するとき、点Ｐの描く軌跡を $L(a)$ とおく。

このとき $C(a) \cap L(a) \cap L(a-1)$ は、自明な点 $(0,0)$ 以外にもう１つの点を持つ。

証明

点 $\mathrm{P}(x, y)$ とすると、

$$x = x(a,\theta) = (a+1)\cos\theta - \cos((a+1)\theta) - a$$

$$y = y(a,\theta) = (a+1)\sin\theta - \sin((a+1)\theta)$$

となる。また、$\varphi(a,\theta) = (x(a,\theta), y(a,\theta))$ とすれば、$L(a) = \left\{\varphi(a,\theta) \middle| 0 \le \theta \le \frac{2\pi}{a}\right\}$ と表せる。また、

$$C(a) \cap L(a) = \left\{(0,0), \varphi\left(a, \frac{2\pi}{a}\right)\right\}$$

である。さて、

$$x\left(a, \frac{2\pi}{a}\right) = (a+1)\cos\frac{2\pi}{a} - \cos((a+1)\frac{2\pi}{a}) - a = (a+1)\cos\frac{2\pi}{a} - \cos\frac{2\pi}{a} - a$$

$$= a\cos\frac{2\pi}{a} - a = a\left(\cos\frac{2\pi}{a} - 1\right)$$

$$y\left(a, \frac{2\pi}{a}\right) = (a+1)\sin\frac{2\pi}{a} - \sin((a+1)\frac{2\pi}{a}) = (a+1)\sin\frac{2\pi}{a} - \sin\frac{2\pi}{a}$$

$$= a\sin\frac{2\pi}{a}$$

となる。次に、$L(a-1)$ 内の点 $\varphi\left(a-1,\dfrac{2\pi}{a}\right)$ を考える。

$$x\left(a-1,\frac{2\pi}{a}\right)=a\cos\frac{2\pi}{a}-\cos(a\cdot\frac{2\pi}{a})-(a-1)=a\cos\frac{2\pi}{a}-1-(a-1)$$

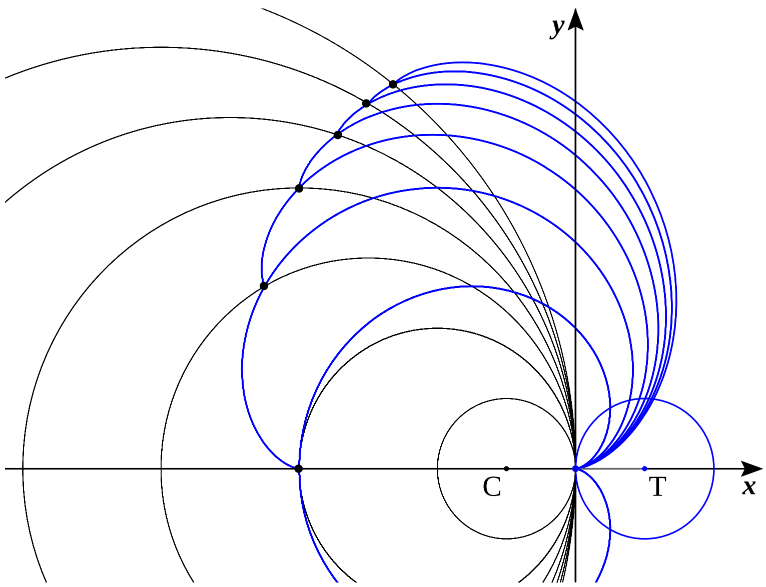
$$=a\cos\frac{2\pi}{a}-a=a\left(\cos\frac{2\pi}{a}-1\right)$$

そして、

$$y\left(a-1,\frac{2\pi}{a}\right)=a\sin\frac{2\pi}{a}-\sin(a\cdot\frac{2\pi}{a})=a\sin\frac{2\pi}{a}$$

ゆえに、点 $\varphi\left(a,\dfrac{2\pi}{a}\right)$ と点 $\varphi\left(a-1,\dfrac{2\pi}{a}\right)$ は同一の点である。

証終



まとめ

（1）図のように、定数 a を順次1ずつ変化させると、定円 $C(a)$ と曲線 $L(a)$、そして曲線 $L(a-1)$ の共有点 $\varphi\left(a,\dfrac{2\pi}{a}\right)$ の列が観察されることになる。

（2）共有点 $\varphi\left(a,\dfrac{2\pi}{a}\right)=\varphi\left(a-1,\dfrac{2\pi}{a}\right)$ において動円を表すときのパラメータは $\theta=\dfrac{2\pi}{a}$ なので、2つの曲線 $L(a)$ と $L(a-1)$ で一致する。定円と動円を結ぶ直線は平行である。

系①

$M(a)=\{\varphi(a,\theta)|0\leq\theta\leq 2\pi\}$とする。

$$C(a)\cap M(a)=\left\{(0,0),\varphi\left(a,\frac{2\pi}{a}k\right)\middle|k\in\mathrm{Z}\right\}$$

であり、ほぼ同じ計算で、

$$x\left(a,\frac{2\pi}{a}k\right)=a\left(\cos\frac{2\pi}{a}k-1\right)\quad,\quad y\left(a,\frac{2\pi}{a}k\right)=a\sin\frac{2\pi}{a}k$$

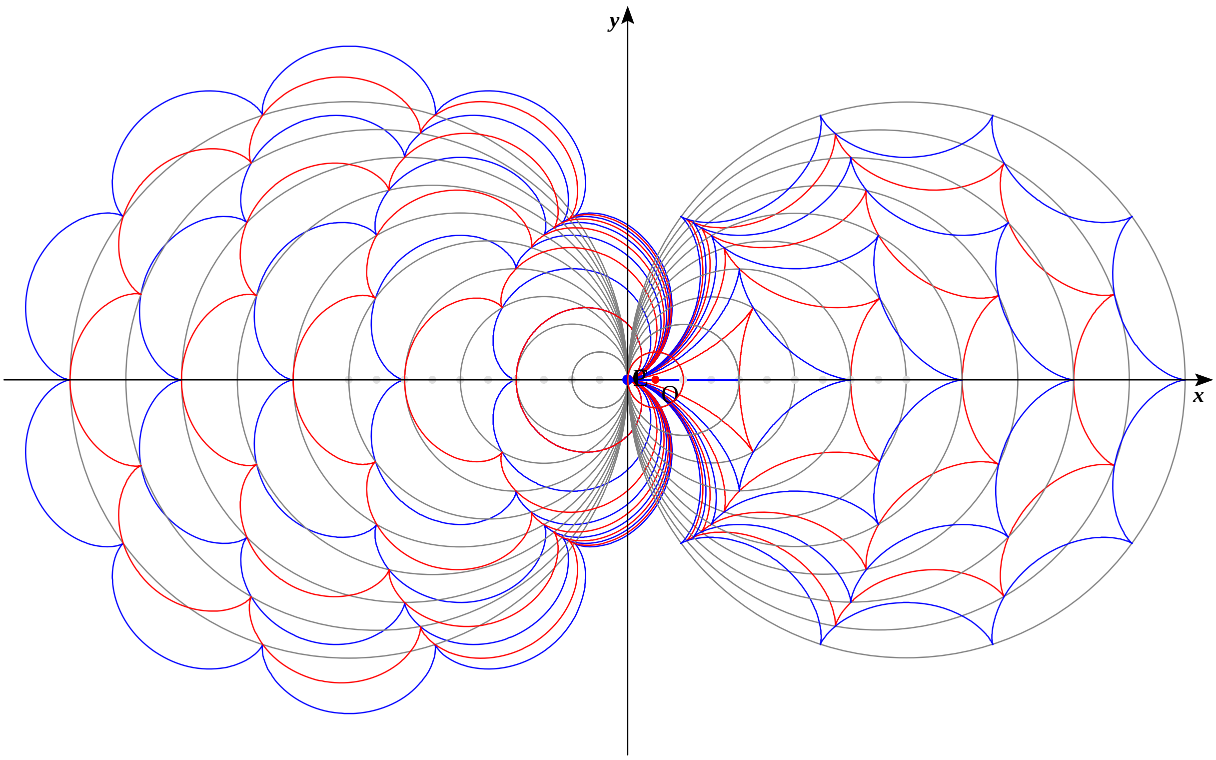
と、

$$x\left(a-1,\frac{2\pi}{a}k\right)=a\left(\cos\frac{2\pi}{a}k-1\right),\quad y\left(a-1,\frac{2\pi}{a}k\right)=a\left(\cos\frac{2\pi}{a}k-1\right)$$

を得る。つまり、$\varphi\left(a,\frac{2\pi}{a}k\right)=\varphi\left(a-1,\frac{2\pi}{a}k\right)\in C(a)\cap M(a)\cap M(a-1)$

系②

また、下図のように内サイクロイドについても同様である。



愛知県立春日井東高等学校　　堀部　和経（　ほりべ　かずのり　）　2009 / 6 / 2