N が平方数でない正の整数ならば、$\sqrt{N}$ は無理数である。

（証明）

背理法で示す。$\sqrt{N}$ を有理数と仮定する。したがって、

$$\sqrt{N}=\frac{m}{n}$$ （既約分数）・・・①

とおける。（このとき、$m=n\sqrt{N}$ であることに注意。）

さて、$n>1$ である。なぜならば、$n=1$ とすると $\sqrt{N}=m$ なので、

$N=m^2$ である。これは、N が平方数でない正の整数という条件に矛盾する。

さて、$\sqrt{N}=\dfrac{m}{n}$ の整数部分を s とすると、

$$s<\frac{m}{n}<s+1$$

つまり、

$$ns<m<ns+n$$

したがって、

$$0<m-ns<n$$ ・・・②

を得る。

ところで、

$$\sqrt{N}=\frac{m}{n}=\frac{m(\sqrt{N}-s)}{n(\sqrt{N}-s)}=\frac{m\sqrt{N}-ms}{n\sqrt{N}-ns}$$ ・・・③

（③の分子）$=m\sqrt{N}-ms=(n\sqrt{N})\sqrt{N}-ms=nN-ms$

（③の分子）$=n\sqrt{N}-ns=m-ns$

したがって、$\sqrt{N}=\dfrac{nN-ms}{m-ns}$ ・・・④

④は、①とは別の $\sqrt{N}$ の分数表示となっている。

また②は、０＜（④の分母）＜（①の分母）$=n$ を意味している。
つまり、①の既約分数ということに矛盾している。　　証明終わり

参考文献　松阪和夫　数学読本１（岩波）