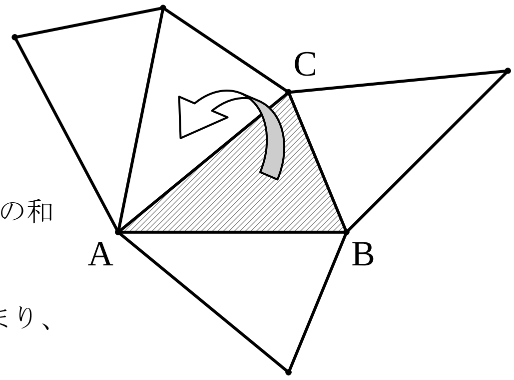
平面上に、△ABC がある。この三角形の１辺を固定し裏返す。そして、この操作を繰り返すことによって、平面が埋め尽くされる条件をもとめよ。



この操作で、平面が埋め尽くされたとすると、

$$A=\frac{2\pi}{x},\quad B=\frac{2\pi}{y},\quad C=\frac{2\pi}{z}$$

となる自然数 x, y, z があり、かつ三角形の内角の和が π なので、$\frac{2\pi}{x}+\frac{2\pi}{y}+\frac{2\pi}{z}=\pi$ である。つまり、

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\quad（x, y, z:\text{自然数}）$$

が、成り立つ。また、$1\leq x\leq y\leq z$ としても一般性を失さない。

x の最小性より、$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}$ したがって，$x\leq 6$。また、$\frac{1}{y}>0, \frac{1}{z}>0$ なので，$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{x}$ したがって，$x>2$ となる。故に、$x=3,4,5,6$ を得る。

$\boxed{（１）}$ $x=3$ のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$（$3\leq y\leq z:$自然数）となる。

y の最小性より、$\frac{1}{6}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}$ したがって，$y\leq 12$。また、$\frac{1}{z}>0$ なので，

$\frac{1}{6}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{y}$ したがって，$y>6$ となる。故に、$y=7,8,9,10,11,12$ を得る。

ところで、$z=\frac{6y}{y-6}$ なので、

y	7	8	9	10	11	12
z	42	24	18	15	不適	12

（２）　$x=4$ のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$（$4 \leq y \leq z$: 自然数）となる。

y の最小性より、$\frac{1}{4}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$ したがって，$y \leq 8$。また、$\frac{1}{z}>0$ なので,

$\frac{1}{4}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{y}$ したがって，$y>4$ となる。故に、$y=5,6,7,8$ を得る。

ところで、$z=\frac{4y}{y-4}$ なので、

y	5	6	7	8
z	20	12	不適	8

（３）　$x=5$ のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$（$5 \leq y \leq z$: 自然数）となる。

y の最小性より、$\frac{3}{10}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$ したがって，$y \leq \frac{20}{3}=6+\frac{2}{3}$。また、$\frac{1}{z}>0$ な

ので，$\frac{3}{10}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{y}$ したがって，$y>\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$ となる。もともと、$y \geq 5$ なの

で，$y=5,6$ を得る。

ところで、$z=\frac{10y}{3y-10}$ なので、

y	5	6
z	10	不適

（４）　$x=6$ のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$（$6 \leq y \leq z$: 自然数）となる。

y の最小性より、$\frac{1}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$ したがって，$y \leq 6$。つまり，$y=6$ を得る。

ところで、$z=\frac{3y}{y-3}$ なので、$z=6$

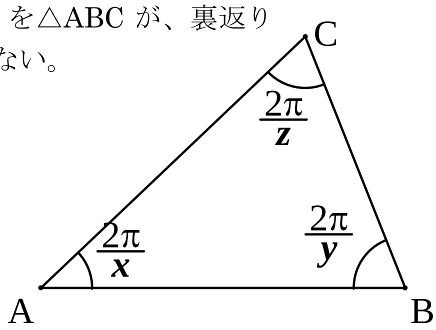
以上，まとめて

$$(x,y,z)=(3,7,42),(3,8,24),(3,9,18),(3,10,15),(3,12,12)$$

$$=(4,5,20),(4,6,12),(4,8,8),(5,5,10),(6,6,6)\cdots\cdots\ (\alpha)$$

の１０通りの可能性がある。

　ところで、右の図で、x が奇数とすると、点 A の周りを△ABC が、裏返りながら元に戻り、辺 AB に辺 AC が重ならなくてはならない。



　故に、「x が奇数　→　$y=z$」となる。

　同様に，

「y が奇数　→　$z=x$」

「z が奇数　→　$x=y$」

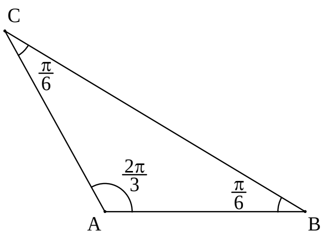
この条件を考慮すると，１０通りの（α）の中で，次の４通りしか、条件を満たさない。

$$(x,y,z)=(3,12,12)\ ,\ (4,6,12)\ ,\ (4,8,8)\ ,\ (6,6,6)$$

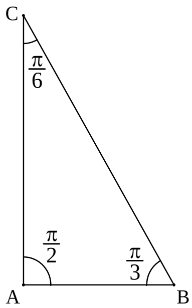
　さて、いま、この４つの場合を角の大きさで表すと、

$$(A,B,C)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$$

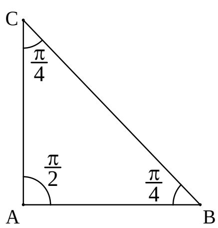
となる。これらの三角形を図示すると、



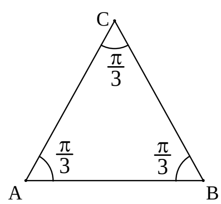
（1）



（2）



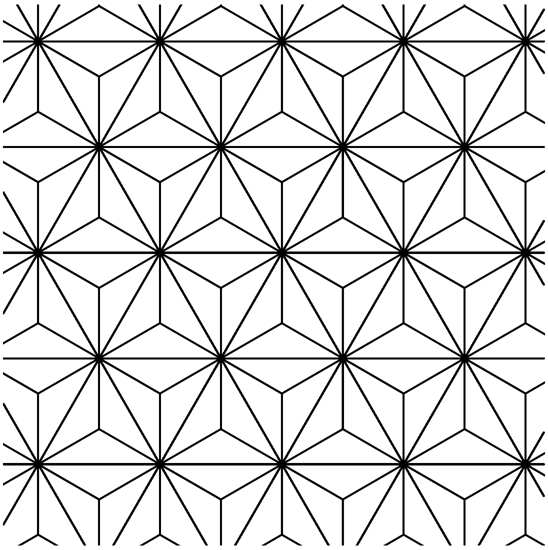
（3）



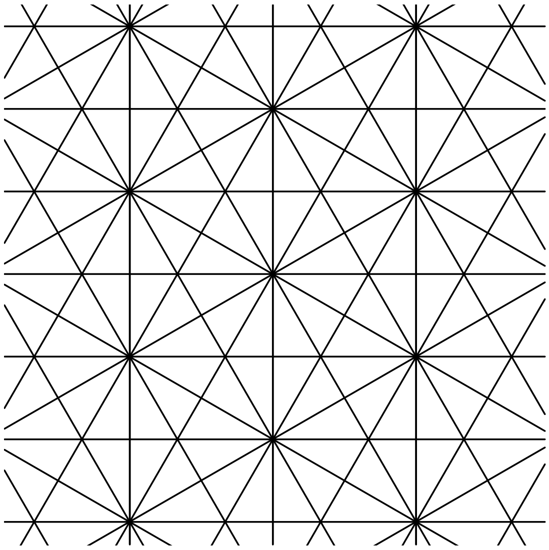
（4）

となる。

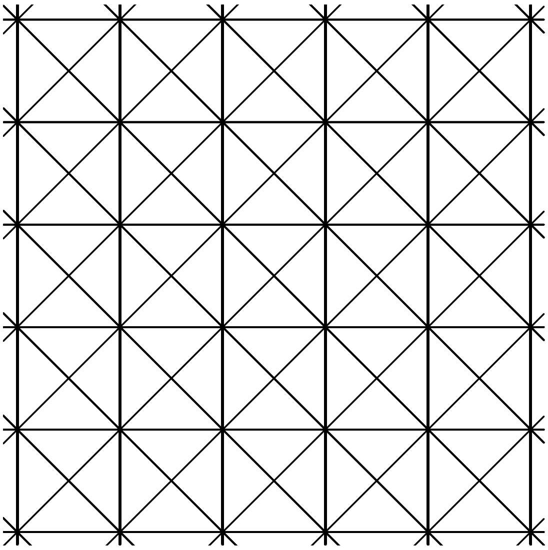
　そして、これらで、平面を埋め尽くすと、図のようになる。（次ページ参照）



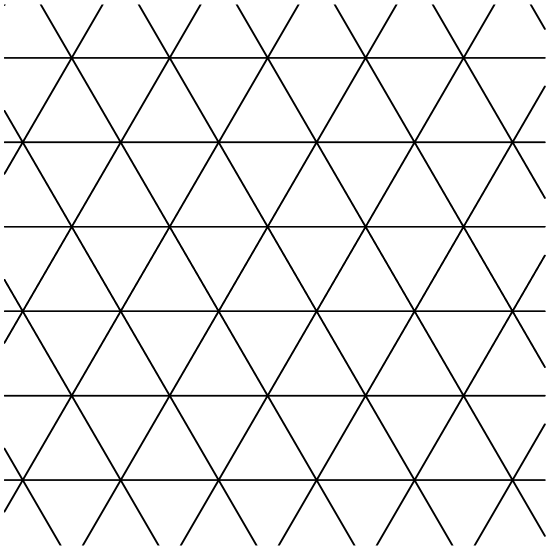
（1）



（2）



（3）



（4）

最後に、この問題を解いてみることによって、次のような形の問題

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\cdots=\frac{1}{n}$$ （x, y, z, n:自然数、）を解け。

を自然な問題と感じますか。(^_^)v