$y=a^x$と$y=\log_a x$のグラフの交点の数

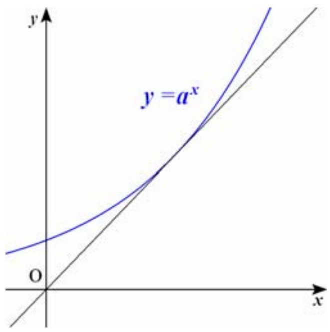
$a>1$と、$0<a<1$に場合分けをして考察する。

$y=a^x$………①、$y=\log_a x$………②とする。当然、②の定義域は、$x>0$である。

1　$a>1$の場合について

①$y=a^x$のグラフは下に凸、②$y=\log_a x$のグラフは上に凸である。したがって、交点の個数は高々２個である。交点の個数を決定するために、①と②が接する条件を考察する。

ところで、①と②のグラフは直線$y=x$に対して対称であるので、①と②が接する条件は、①と直線$y=x$が接する条件を調べればよい。



接点をＴ（t，a^t）とすると、接線の方程式は、

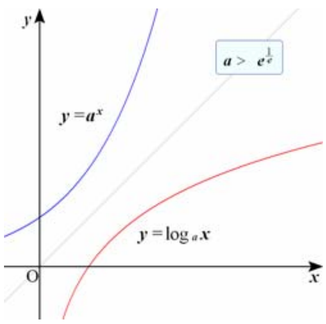
$$y=a^t\cdot\log a\cdot(x-t)+a^t$$

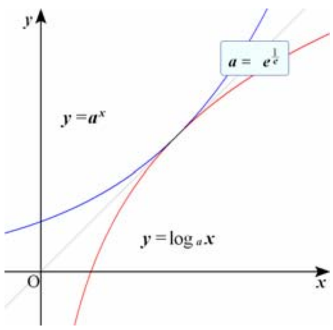
となる。これが、直線$y=x$に一致する条件は、

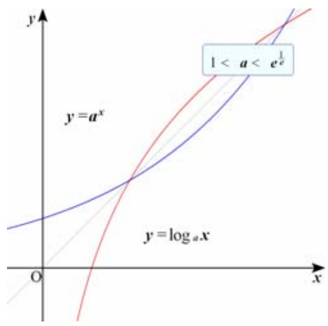
$$\begin{cases} a^t\cdot\log a=1 \\ a^t=a^t\cdot t\log a \end{cases}$$

この連立方程式から、$a^t=t$を得て、連立方程式を解けば、（t，a）＝（e，$e^{\frac{1}{e}}$）となる。したがって、

$$\begin{cases} a>e^{\frac{1}{e}} & \text{のとき、交点０個} \\ a=e^{\frac{1}{e}} & \text{のとき、交点１個} \\ 1<a<e^{\frac{1}{e}} & \text{のとき、交点２個} \end{cases}$$







２　$0<a<1$の場合について

$f(x)=a^x-\log_a x$ とおく。ここで、直線 $y=x$ 上に必ず交点を１つ持つことを確認しておこう。つまり、 $f(x)=0$ の実数解は少なくとも１個存在する。

さて、

$$f'(x)=a^x\cdot\log a-\frac{1}{x\log a}=-\frac{\log a}{x}\left(\frac{1}{(\log a)^2}-xa^x\right)$$

となる。ここで、$-\frac{\log a}{x}>0$ であるので、$g(x)=\frac{1}{(\log a)^2}-xa^x$ とおけば、 $f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致している。

そして、 $g(x)$ において、$a^x=X$ と変数変換した式を $h(X)$ とすると、

$$h(X)=\frac{1}{(\log a)^2}-X\log_a X$$

となる。よって、

$$h'(X)=-\log_a X-\frac{1}{\log a}=\frac{\log X+1}{-\log a}$$

となる。$h'(X)=0$ とすると、$X=e^{-1}=\frac{1}{e}$ を得る。

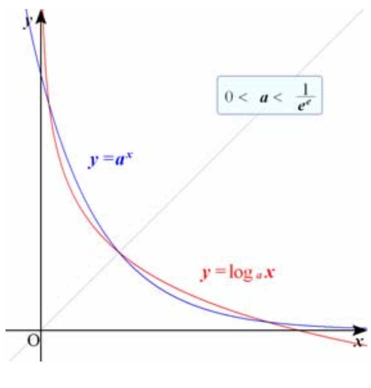
X	（0）	～	$\frac{1}{e}$	～	（∞）
$h'(X)$		－	0	＋	
$h(X)$	（∞）	↘	$h\left(\frac{1}{e}\right)$	↗	（∞）

$0<a<1$から、$h(X)$ の増減表は右上のようになる。

いま、$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{(\log a)^2}-\frac{1}{e}\log_a\frac{1}{e}<0$ とすると、

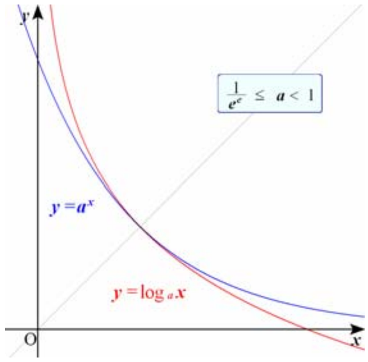
$\frac{1}{(\log a)^2}+\frac{1}{e\log a}<0$ となり、 $e+\log a<0$ を得るので、

$a<e^{-e}=\frac{1}{e^e}$ である。



故に、$0<a<\frac{1}{e^e}$ ならば、$h(X)$ ひいては、$g(x)$ つまり $f'(x)$ の符号変化が、正から負、負から正と２度起こる。したがって、 $f(x)=0$ は３つの実数解を持つ。

また、$\dfrac{1}{e^e} \leq a < 1$ であるなら、実数解は１個である。

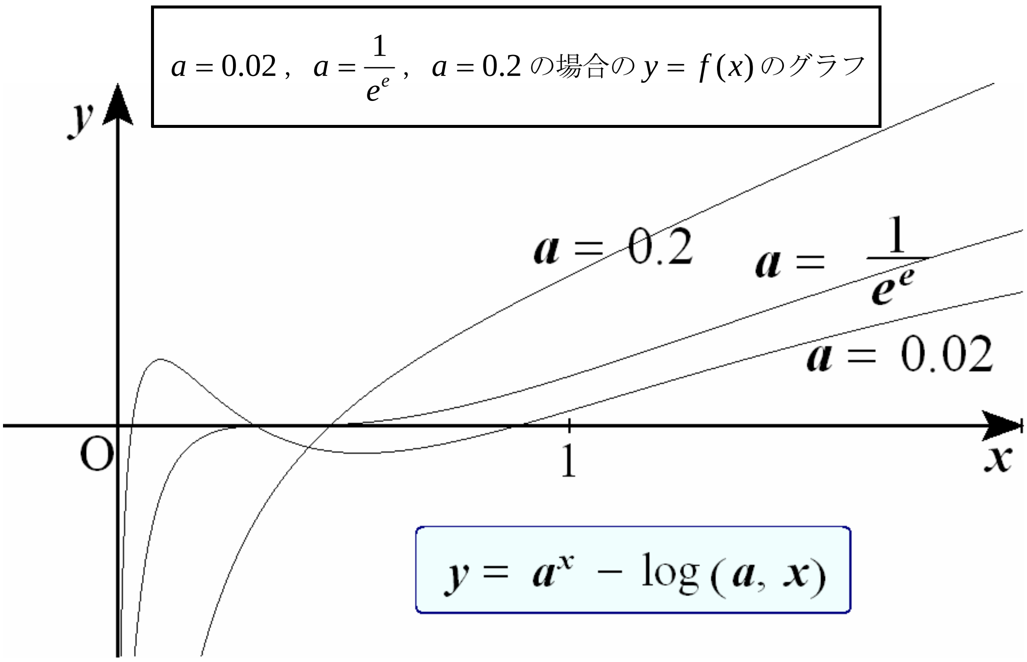


３　まとめ

２つのグラフ $y = a^x \cdots$①、$y = \log_a x \cdots$②の交点の個数は次のようになる。

a の範囲	$0 < a < \dfrac{1}{e^e}$	$\dfrac{1}{e^e} \leq a < 1$	$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$	$a = e^{\frac{1}{e}}$	$e^{\frac{1}{e}} < a$
交点の個数	３個	１個	２個	１個	０個（なし）

参考　$f(x) = a^x - \log_a x$　**のグラフ（$0 < a < 1$ の場合）**



春日井東高校　堀部和経

参考　$e^{\frac{1}{e}} = 1.4446678610097661336 58\cdots$　，　$\dfrac{1}{e^e} = 0.0659880358453125370\cdots$