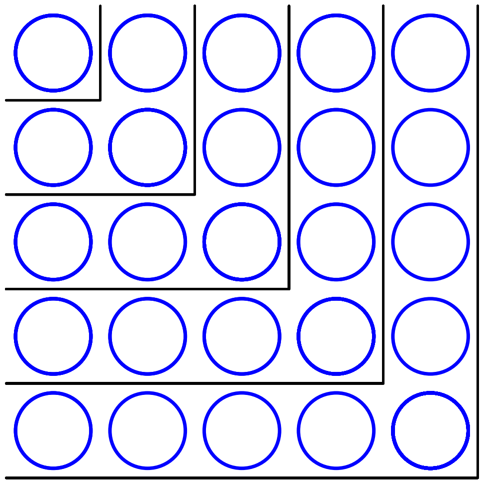
四角数とピタゴラス数



右の図は、石を「グノモン」（逆さＬの字）の形に並べたモノです。左上から、グノモンで区切られた石の個数は順に

1　3　5　7　9・・・

となっています。

これを見て、

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$　……①

$1+3+5+7+9=5^2$　…②

となっているのが分かりますね。つまり、1 から順に奇数を n 個たすと、n^2 となります。つまり、$1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$ となります。

左上から、順に奇数個の石を並べていくと、いつも石は正方形の形なっているということです。このことから、奇数の列 1　3　5　7　9・・・を四角数と呼んでいます。

その四角数を少し別の見方をしてみると、また面白い性質が見えてきます。

上の式①②を再度書いてみます。

$1+3+5+7=4^2$　……①

$1+3+5+7+3^2=5^2$　…②

②の式の左辺の最後の項を、$9=3^2$ と書き直して、①の左辺を消去すると、

$3^2+4^2=5^2$

となり、ピタゴラスの定理を満たす整数解がひとつ分かります。今は、1から9までの和を考えましたね。最後の9を25にした式を書いてみましょう。

$1+3+\cdots+23=12^2$　……③

$1+3+\cdots+23+25=13^2$　…④

となり、$25=5^2$ なので、③と④より、

$5^2+12^2=13^2$

を得る。同様に、

$1+3+\cdots+47=24^2$

$1+3+\cdots+47+49=25^2$

から、

$7^2+24^2=25^2$

を得ます。

したがって、一般的に、$N=2n-1 \ \ (n \geq 2)$ に対して、

$$1+3+\cdots+(N^2-2)=\left(\frac{N^2-1}{2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$1+3+\cdots+(N^2-2)+N^2=\left(\frac{N^2+1}{2}\right)^2 \quad \cdots⑥$$

なので、$N^2+\left(\frac{N^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{N^2+1}{2}\right)^2$ となり、ピタゴラス数（ピタゴラスの定理を満たす整数の組）を見つけることができた。

以下、ここで得られたピタゴラス数はすべて異なる、つまり、無限個の組み合わせである事を示す。

連比 $R(N)=N:\frac{N^2-1}{2}:\frac{N^2+1}{2}$ と表せば、$N=2n-1 \ \ (n \geq 2)$ 、$M=2m-1 \ \ (m \geq 2)$ に対して、$N \neq M \Rightarrow R(N) \neq R(M)$ を示す。

（証明）対偶を示す。$R(N)=R(M)$ とすると、$N:\frac{N^2-1}{2}=M:\frac{M^2-1}{2}$ であるから、

$N(M^2-1)=M(N^2-1)$ を得る。整理して、$(N-M)(MN+1)=0$ となる。

$N \geq 3$, $M \geq 3$ より、$N=M$ （証終）

「四角数」のアイデアだけで、ピタゴラス数の自明でない解*) を無限に得ることができました。

どうでしょう、石ころを並べるだけで、こんな事まで分かってしまうんです。(^_^)v

＊） 自明でない解の説明

例えば、ひとつのピタゴラス数 $R(3)=3:4:5$ を考えると、連比が同じになる、

$3:4:5$, $6:8:10$, $9:12:15$, $\cdots$

は、明らかにピタゴラス数ですね。こういう解を自明な解と呼んでいます。