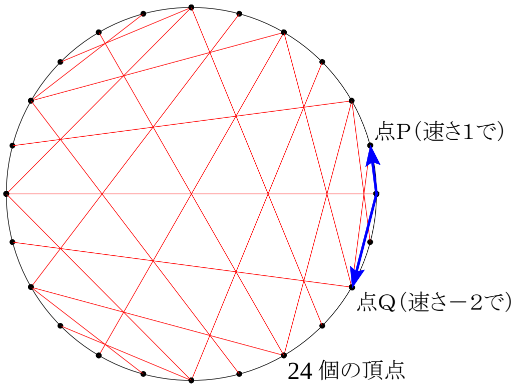
円周上の等分点を、１：（－２）で移動する２点を結ぶ線分の交点について

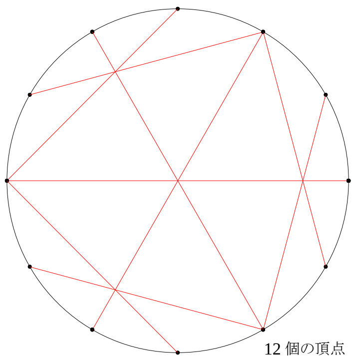
円周を偶数等分する点上を、左回りに移動する点をＰとし、その２倍の速さで右回りに移動する点をＱとし、直線ＰＱを引く。

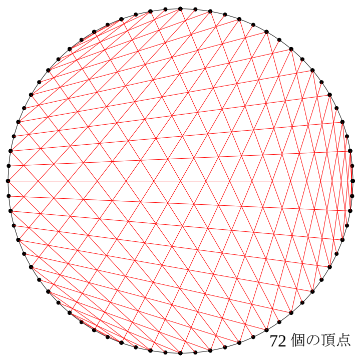
このとき、直線群ＰＱのすべての交点は、この直線群の３本の直線の交点となっている。

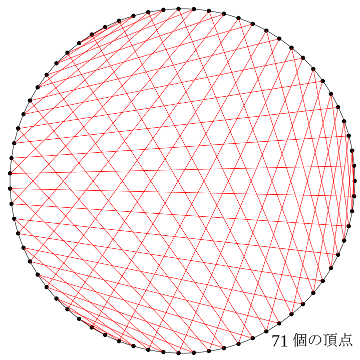
つまり、正偶数角形[※1]のある頂点から出発し、１：（－２）で移動する２点を結ぶ線分を考える。



例）$n=12$ と $n=72$ および $n=71$ の場合の図







正 12 角形や、正 72 角形では 3 本の直線が 1 点で交わる。

正 71 角形では 3 本の直線が 1 点で交わることはない。

この３つの図は、正 12 角形、正 72 角形、正 71 角形である。そして、その頂点を点 P は速さ「１」で移動し、点 Q は速さ「－２」で移動している。２点 P，Q を結ぶ線分（弦）をすべて描いてある。

このとき、左図と中図は、すべての交点が直線群 PQ の３本の交点となっている。しかし、右図の正 71 角形では、同様の直線群は、の交点はいずれも３本の交点とはなっていない。

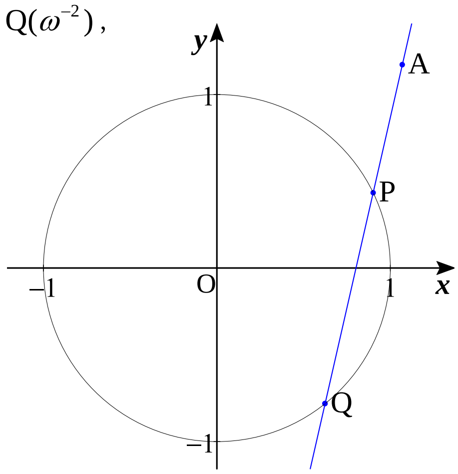
実際に GRAPES で実験し、正多角形の様々な場合について調べてみた。すると、正偶数角形の場合にのみ、3 本の直線が 1 点で交わることがわかった。

単位円周上の２点 P,Q を結ぶ直線について考察したのち、正多角形を考察する。

以下、複素平面上で考える。

点Ｐの方程式

Ｐ, Ｑ は単位円上を回るとし，その複素数による表現を $\mathrm{P}(\omega), \mathrm{Q}(\omega^{-2})$，とする。直線 PQ 上に点 $\mathrm{A}(a)$ があるとすると



$$\frac{a-\omega}{\omega^{-2}-\omega} \text{ は実数}$$

なので，

$$\frac{a-\omega}{\omega^{-2}-\omega}=\frac{\bar{a}-\omega^{-1}}{\omega^{2}-\omega^{-1}}$$

が成り立つ。これを整理して，

$$\omega^3-a\omega^2-\bar{a}\,\omega+1=0 \quad \cdots ①$$

を得る。これは３次方程式なので，ちょうど３つの解をもつ。

ただ，注意すべきは，方程式①は，ω が単位円上の点であることを仮定して作ったものであるから，$|\omega|=1$ を満たす解だけしか意味を持たない。

このことから，

点Ａを通る（直線群の）直線は最大３本ある。

ことがわかる。

解の性質

３つの解を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とすれば，解と係数の関係から，

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=a \quad \cdots ②$$

$$\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1=-\bar{a} \quad \cdots ③$$

$$\omega_1\omega_2\omega_3=-1 \quad \cdots ④$$

を得る。

さて、３次方程式①

$$\omega^3-a\omega^2-\bar{a}\,\omega+1=0$$

より

$$1-\frac{a}{\omega}-\frac{\bar{a}}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}=0$$

を得る。これの共役複素数をとって，

$$\frac{1}{\bar{\omega}^3}-\frac{a}{\bar{\omega}^2}-\frac{\bar{a}}{\bar{\omega}}+1=0$$

となり，方程式①の ω に $\dfrac{1}{\overline{\omega}}$ を代入したものと同じであるから，

$$\boxed{\frac{1}{\overline{\omega_1}},\frac{1}{\overline{\omega_2}},\frac{1}{\overline{\omega_3}}\text{ も方程式①の解である。}}$$

ことがわかる。

解は３つしかないのだから，次のいずれかが成り立つと考えてよい。ただし、i) ii) iii) について、「場合分け」となっているのではない。(※１)

i)　$\omega_1=\dfrac{1}{\overline{\omega_1}},\omega_2=\dfrac{1}{\overline{\omega_2}},\omega_3=\dfrac{1}{\overline{\omega_3}}$

ii)　$\omega_1=\dfrac{1}{\overline{\omega_1}},\omega_2=\dfrac{1}{\overline{\omega_3}},\omega_3=\dfrac{1}{\overline{\omega_2}}$

iii)　$\omega_1=\dfrac{1}{\overline{\omega_2}},\omega_2=\dfrac{1}{\overline{\omega_3}},\omega_3=\dfrac{1}{\overline{\omega_1}}$

i) を満たすとき，すべての解は単位円上にある。
ii) を満たすとき，ひとつの解 ω_1 は単位円上にある。また，$\arg\omega_2=\arg\omega_3$ かつ $|\omega_2||\omega_3|=1$。
iii) を満たすとき，$|\omega_1||\omega_2|=1$ であり，解と係数の関係から $|\omega_1||\omega_2||\omega_3|=1$ なので，$|\omega_3|=1$ を得る。

同様にして，$|\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$ を得る。つまり、解は単位円上にある。

一方，$\arg\omega_1=\arg_2=\arg\omega_3$ であるから，３重解になる。このとき，解と係数の関係から，

$$3\omega_1=a,\quad \omega_1{}^3=-1\quad \text{より，}\quad a=3\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)\quad (k\text{ は整数})$$

を得る。これはデルトイドの先端の３点を表している。

３直線が１点で交わるときの点Ａの存在領域

まず，i) を満たす点 $\mathrm{A}(a)$ の領域と，ii) を満たす点 $\mathrm{A}(a)$ の領域の共通部分を求める。

i)と ii)の両方を満たすとすれば，

$$\omega_2=\omega_3,\quad |\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$$

であるから，解と係数の関係より，

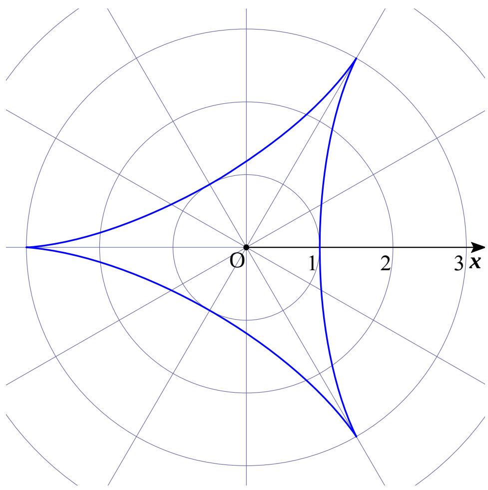
$$\omega_1+2\omega_2=a,\ \omega_1\omega_2{}^2=-1$$

となり，$\arg\omega_2=t$ とすれば，$\arg\omega_1+2\arg\omega_2=\arg(-1)$ より，$\arg\omega_1=\pi-2t$ となるので、

$$\begin{aligned}a&=\{\cos(\pi-2t)+i\sin(\pi-2t)\}+2(\cos t+i\sin t)\\&=(-\cos 2t+2\cos t)+i(\sin 2t+2\sin t)\end{aligned}$$

を得る。これは，デルトイドを表している。

つまり、i) と ii) の両方を満たす点 $\mathrm{A}(a)$ の領域の共通部分は、デルトイドである。つまり、デルドイドが、i) と ii) の境界線となっている。



$$x=-\cos 2t+2\cos t$$
$$y=\sin 2t+2\sin t$$

デルトイド内の１点，例えば$a=0$について，方程式①は$x^3+1=0$となる。つまり、$a=0$は、i）の場合に属する。

以上の考察から，３直線が１点で交わるときの点Ａの存在領域が確定される。

デルトイドの内部に点$\mathrm{A}(a)$があるとき，方程式①の解はすべて単位円上にある。

とわかる。

３直線が１点で交わるための点Ｐの条件

点Ａがデルトイドの内部にあるとき，

$$|\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$$

であり，解と係数の関係④より，

$$\arg\omega_1+\arg\omega_2+\arg\omega_3=(2k+1)\pi \qquad （k\text{ は整数}）$$

を得る。

一方，３点$\mathrm{P}_1(\omega_1),\mathrm{P}_2(\omega_2),\mathrm{P}_3(\omega_3)$が上の２条件を満たすとき，

$$\omega_1\omega_2\omega_3=-1$$

であり，

$$a=\omega_1+\omega_2+\omega_3$$

とおけば，

$$\bar{a}=\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_2}=-(\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1)$$

を得る。つまり，

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ は方程式 $\omega^3-a\omega^2-\bar{a}\omega+1=0$ の解である

これは，方程式①と同じであるから， $\mathrm{P}_i(\omega_i),\mathrm{Q}_i(\omega_i^{-2})$（$i=1,2,3$）とするとき，３本の直線$\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i$（$i=1,2,3$）はいずれも点$\mathrm{A}(a)$を通る。

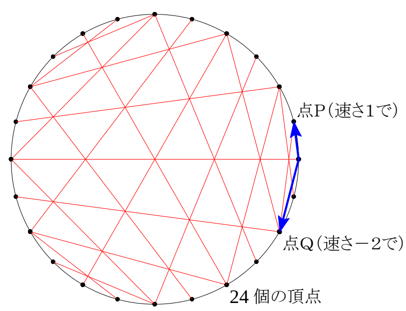
よって，

（直線群の）３直線が１点で交わるための必要十分条件は， $\arg\omega_1+\arg\omega_2+\arg\omega_3=(2k+1)\pi$ ・・・⑤

である。

以上で、複素平面上での考察を終え、以下、

正偶数角形の頂点を１：（－２）で移動する２点を 結ぶ線分群の交点は常に３直線の交点となっている。



ことを示す。

この証明のため［Part.1］～［Part.4］に分け、考察する。

３本の直線のグループ分け［Part.1］

円は単位円とし、極座標$(1,\theta)$の点 P を$P(\theta)$と表す。

そして、円周上に動点$P(\theta)$, $Q(-2\theta)$ と

定点$A(0)$，$B\left(\frac{2}{3}\pi\right)$, $C\left(\frac{4}{3}\pi\right)$をとる。

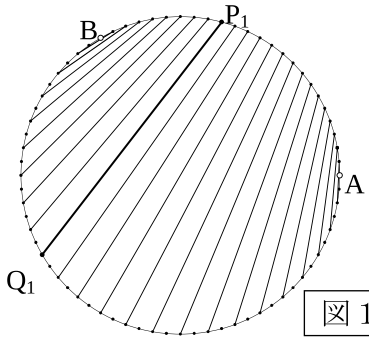


図 1

点 P が円周上を 1 周するとき、Q は 2 周するが、このとき弦 PQ は以下の 3 グループ (G1～G3) に分けることができる。同じグループ間では 2 本の弦が交わることはない。

（G1） $0 \le \theta \le \frac{2}{3}\pi$の範囲を動くとき（図１）

点 P ， Q は、点 A を出発し、点 B に到着する。

$P_1(\alpha)$，$Q_1(-2\alpha)$とする。

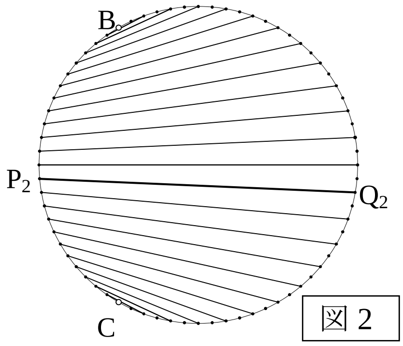


図 2

（G2） $0 \le \theta \le \frac{4}{3}\pi$の範囲を動くとき（図２）

点 P ， Q は、点 B を出発し、点 C に到着する。

$P_2(\beta)$，$Q_2(-2\beta)$ とする。

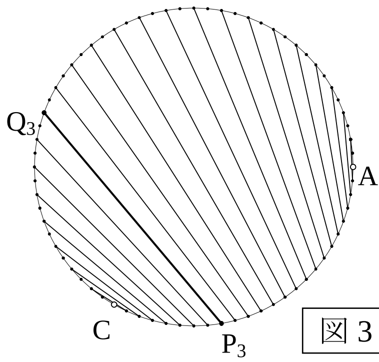


図 3

（G3） $\frac{4}{3}\pi \le \theta \le 2\pi$の範囲を動くとき（図３）

点 P ， Q は、点 C を出発し、点 A に到着する。

$P_3(\gamma)$，$Q_3(-2\gamma)$ とする。

３つのグループを重ねて表示すると (図４) のようになる。

この図は、θを5°（$\frac{\pi}{36}$ラジアン）ずつ進めているのだが、３つのグループの直線群がうまく１点で交わっている。

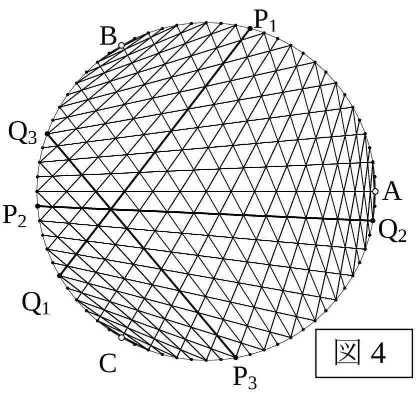


図 4

（直線群の）３直線が１点で交わるための必要十分条件は,

$$\arg\omega_1 + \arg\omega_2 + \arg\omega_3 = (2k+1)\pi \quad ・・・⑤$$

であった。これを、この正多角形の場合に当てはめると、

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = (2k+1)\pi \quad ・・・⑥}$$

正偶数角形と正奇数角形［Part.3］

最初の例で述べたように、正偶数角形の場合には３本の弦が１点で交わるが、正奇数角形ではこのようなことは起こらないことが観察される。なぜだろうか。

点 P_1, P_2, P_3 の位置を、角ではなく、出発してから移動の回数で表し、それを a, b, c とする。このとき、

$$\alpha = \frac{2\pi a}{n},\quad \beta = \frac{2\pi b}{n},\ \gamma = \frac{2\pi c}{n}$$

であるから、

$$\alpha + \beta + \gamma = (a+b+c)\frac{2\pi}{n}$$

これより、

$$\alpha + \beta + \gamma = (2k+1)\pi\ \cdot\cdot\cdot ⑥ \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c = \frac{(2k+1)n}{2}\ \cdot\cdot\cdot ⑦$$

を得る。よって、この条件を満たす整数 a, b, c が存在する必要十分条件は、明らかに

n が偶数である・・・⑧

ことである。

以上で、正偶数角形の時には交点はすべて３本の直線による交点となり、正奇数角形の時には、そうはならないことが示された。

線分（弦）から直線へ［Part.4］

２点 P,Q を通る「線分（弦）」を、「直線」に変えたとき、現れる交点が全て３本の直線による交点とはなっているとは限らない。しかし、見かけ上２本の直線の交点となっている点についても、重解条件により２本の直線が１本に重なっている直線と、別の直線の交点という状況である。その意味で、３本の直線の交点といえる。

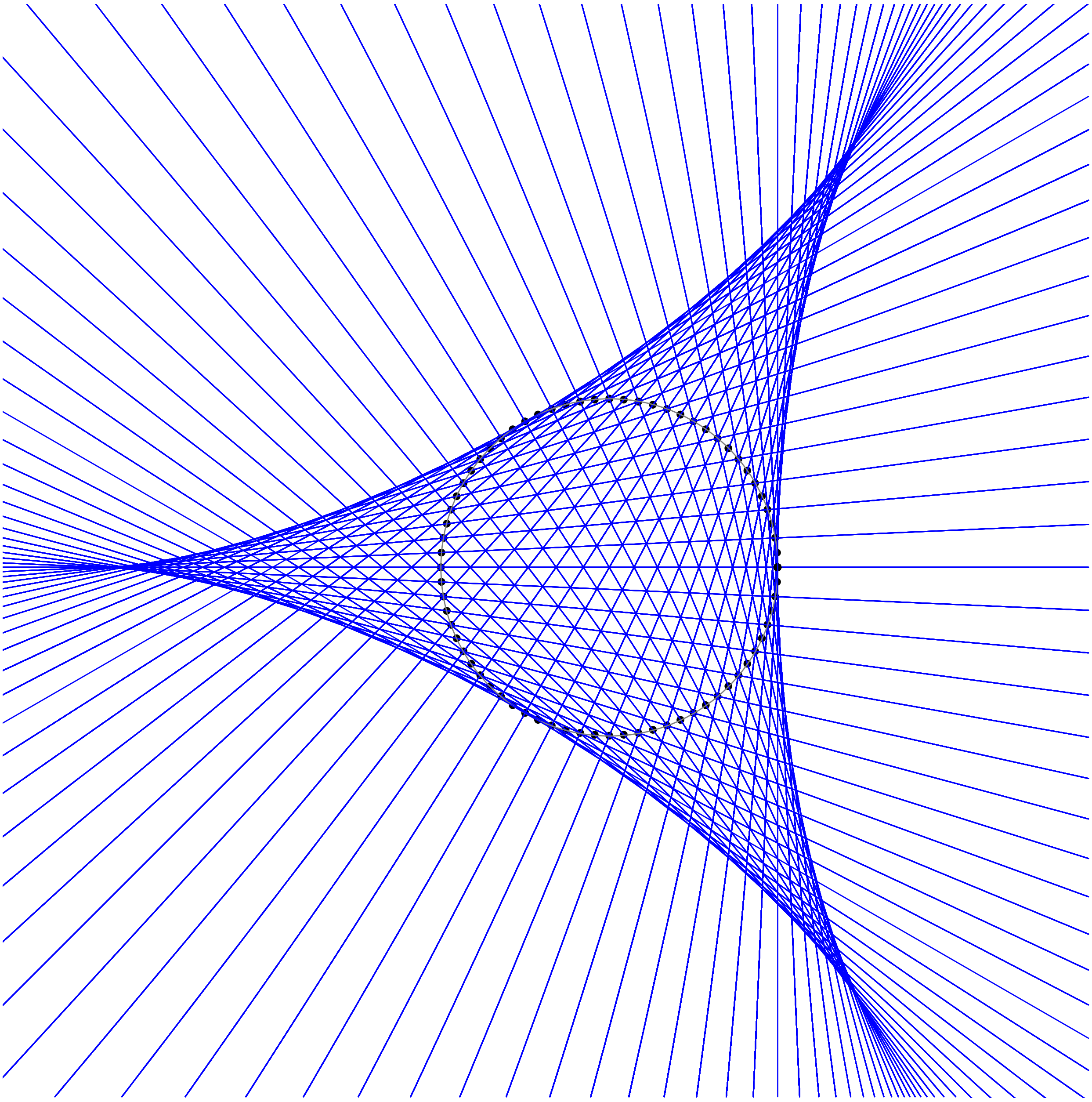
したがって、

正偶数角形の頂点を $1:(-2)$ の速さで移動する２点を結ぶ直線群による交点は、３直線が交わってできる交点のみである。

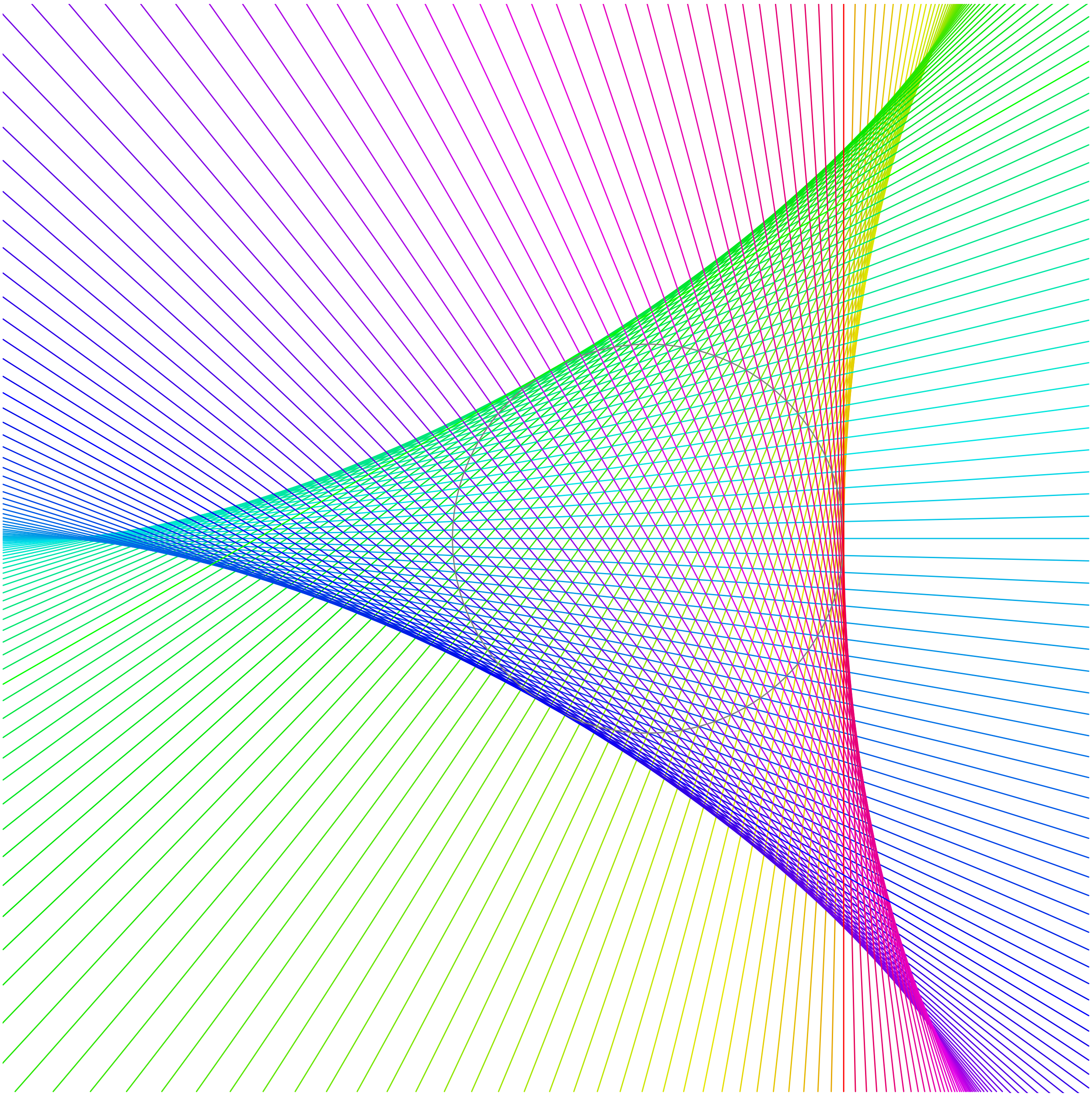
と、言うことができる。

（※１）「円周上を等分する」や「正 n 角形」等の表現の揺らぎは、本質的な問題ではない。
（※２）この３つの条件は、「場合分け」となっているわけではない。３つ合わせれば全体となると言うことを言っているに過ぎない。
（※３）直線群の包絡線が、デルドイドになることについては、次を参照。
「転がる円の直径の包絡線」http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/
「異なる速さで円周上を回る２点を結ぶ弦が作る模様」同上
（※４）この事実は、堀部和経が見つけ、友田勝久が証明したものである。

大阪教育大学付属高等学校池田校舎　友田勝久、愛知県立春日井東高等学校　堀部和経 (※４)



正７２角形の等分点を$1:(-2)$の速さで移動する２点を結ぶ直線群と交点



正１４４角形の等分点を1: (−2) の速さで移動する２点を結ぶ直線群と交点（カラー）