三角形の面積について

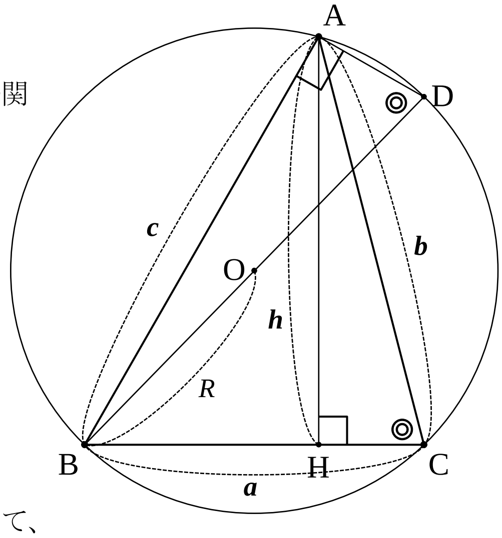
―――――― sin , cos , tan が出てこないお話 ――――――

［Ｓ１］ $S=\frac{1}{2}ah$ から、話を始めましょう。

この公式は、「底辺かける高さ割る２」と、多くの人が声に出して言うことができると思います。すごく一般に定着した「公式」ですね。

さて、△ABC の外接円を考えたとき、その半径 R との関係を見てみましょう。
右の図で、半径 BO の延長と、円 O との交点を D とします。
△AHC と△BAD は、相似です。

$$\left(\begin{array}{l}\angle \mathrm{AHC}=\angle \mathrm{BAD}=90^\circ \\ \angle \mathrm{ACH}=\angle \mathrm{BDA}\text{（円周角）}\end{array}\right)$$



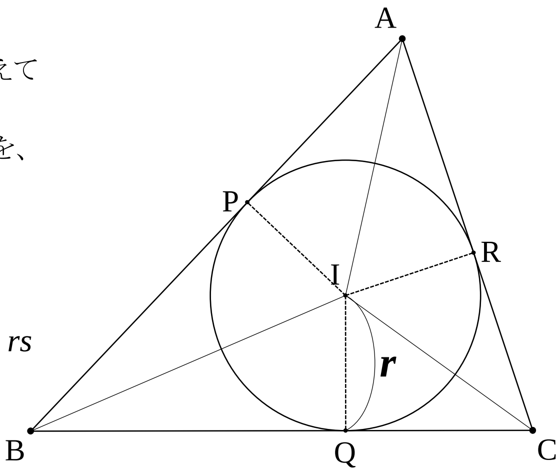
したがって、

AC∶AH＝BD∶BA

となり、$b:h=2R:c$ から、$h=\frac{bc}{2R}$ を得ます。したがって、

［Ｓ２］ $S=\frac{abc}{4R}$ となります。

次に、内接円を考え、その半径 r との関係を考えてみましょう。
内接円の中心 I から、各辺に下ろした垂線の足を、P , Q , R とおきます。すると、



$S=$△IBC＋△ICA＋△IAB

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=r\frac{a+b+c}{2}=rs$$

（ただし、$s=\frac{a+b+c}{2}$）

［Ｓ３］ $S=rs$ ですね。

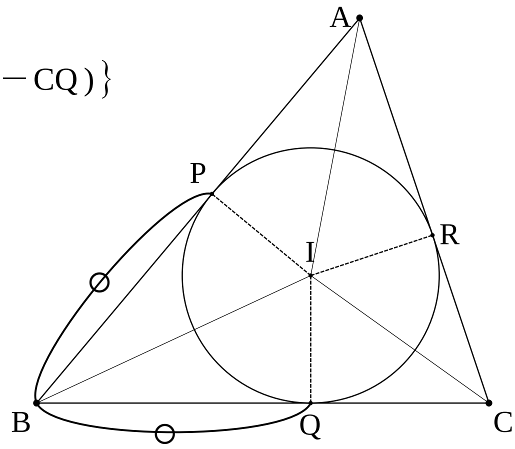
ところで、『 s って、何ですか？ 』という質問にどのように答えますか。

『 三角形の１周の長さの半分 』･･･で、納得？･･･しますか？

２点P，Qは、点Bから円Iに引いた接線の接点なので、

$$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$$

また、



$$\mathrm{BP}=\frac{1}{2}(\mathrm{BP}+\mathrm{BQ})=\frac{1}{2}\{(\mathrm{AB}-\mathrm{AP})+(\mathrm{BC}-\mathrm{CQ})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\mathrm{AB}+\mathrm{BC})-(\mathrm{AR}+\mathrm{CR})\}$$

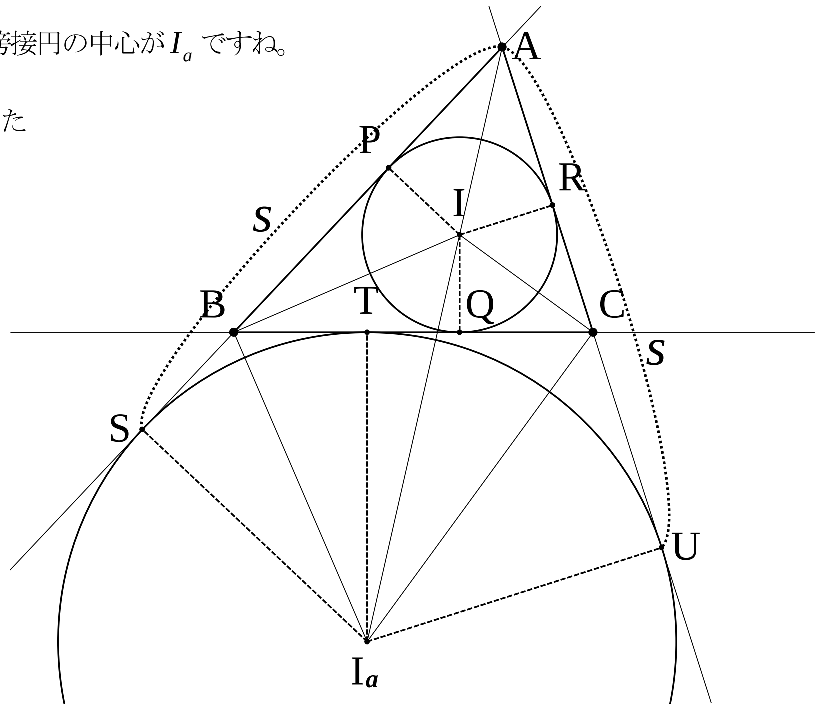
$$=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{CA})=\frac{1}{2}(b+a-b)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c-2b)=s-b$$

同様に考えて、$\boxed{\mathrm{AP}=\mathrm{AR}=s-a,\ \mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=s-b,\ \mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=s-c}$ ① となります。

次に△ABCの∠Aの二等分線と∠Bおよび∠Cの外角の二等分線の交点をI_aとします。つまり、

辺BCと辺の延長ABとACに接する傍接円の中心がI_aですね。



２点S，Uは、点Aから円I_aに引いた接線の接点なので、

$$\mathrm{AS}=\mathrm{AU}$$

また、

$$\begin{aligned}2s=a+b+c&=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}\\&=\mathrm{AB}+(\mathrm{BT}+\mathrm{TC})+\mathrm{CA}\\&=(\mathrm{AB}+\mathrm{BT})+(\mathrm{TC}+\mathrm{CA})\\&=(\mathrm{AB}+\mathrm{BS})+(\mathrm{UC}+\mathrm{CA})\\&=\mathrm{AS}+\mathrm{UA}\\&=2\mathrm{AS}\end{aligned}$$

よって、$\mathrm{AS}=\mathrm{AU}=s$

つまり、

『 sとは１つの頂点から、その内角の中にある傍接円の接点までの距離』

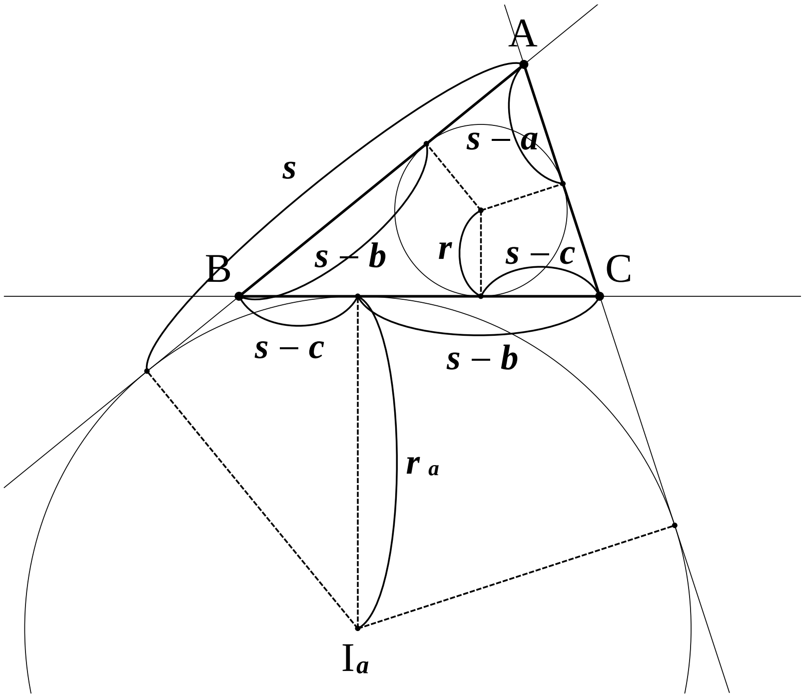
「s」を具体的な長さで、示せました。

これから、$\boxed{\mathrm{BT}=\mathrm{BS}=s-c\,,\ \mathrm{CT}=\mathrm{CU}=s-b}$ ② となります。

当然、他の２つの傍接円に関係して、同様な結果がえられますね。

全ての関係を書き込むと余りにゴチャゴチャしそうなので、①と②の一部だけを書いた図を作ってみました。

いろいろな長さに「s」が顔を出していますね。



さて、△API と△ASI_a は相似ですね。（r_a ：円 I_a の半径）

AP：PI＝AS：SI_a

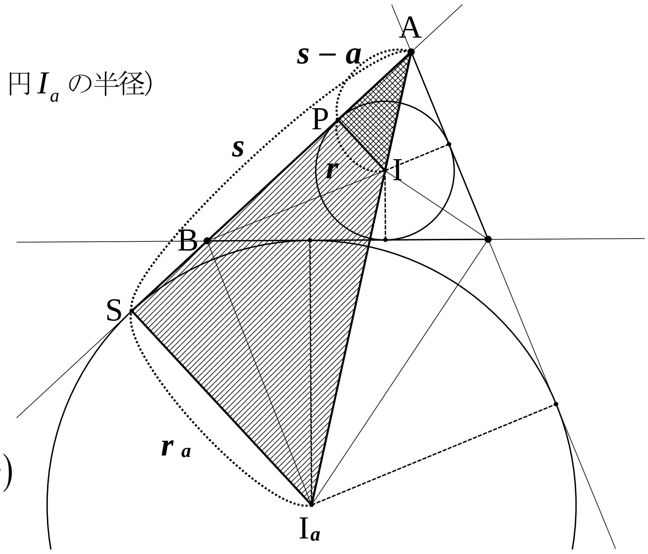
となり、

$$(s-a):r=s:r_a$$

$$r_a(s-a)=rs=S$$

を得るので、

［Ｓ４］　$S=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$



［Ｓ３］と合わせて $S=r\,s=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$　キレイな式ですね。

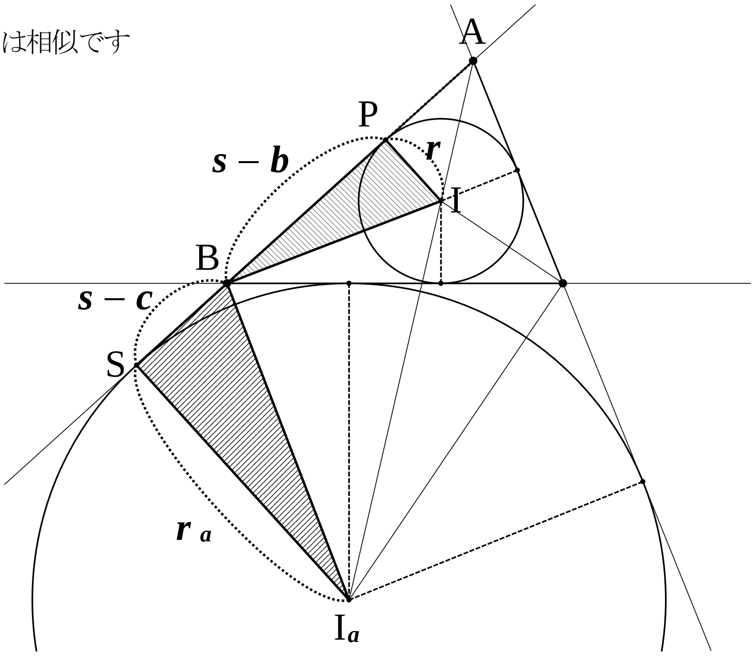
この等式から、

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{s-a}{S}+\frac{s-b}{S}+\frac{s-c}{S}=\frac{3s-(a+b+c)}{S}=\frac{s}{rs}=\frac{1}{r}$$

となり、

$$\boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}}$$ ③　美しいと、思いませんか。

先ほどと、同じ図で　△PIBと△SBI_aは相似です



PI：PB＝SB：SI_a

$$r:(s-b)=(s-c):r_a$$

から、

$$r_a=\frac{(s-b)(s-c)}{r}$$

となるので、［S４］に代入して、

［S５］　$S=\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}$

となります。

この等式の右辺の分母分子に、s をかけて、

$$S=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{rs}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{S}$$

となります。分母を払えば、

［S６］　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　（ヘロン）

となりますね。

さて、$S=rs=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$　をすべてかけ合わせると、

$$S^4=r\ r_a r_b r_c\times s(s-a)(s-b)(s-c)=r\ r_a r_b r_c\times S^2$$

両辺をSで割って、

［S７］　$S=\sqrt{r\ r_a r_b r_c}$　　（マイユー）

が得られます。また、③を代入すれば、$S=\dfrac{r_a r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a}}$ ともかけますね。

春日井東高校　堀部和経　（２０１０／１２）

（参考資料）　「ヘロンの公式にいたる公式」　（堀部和経）