座標平面に接する円の中心の軌跡

［方向余弦］

三角形 ABC を含む平面を，平面 ABC と呼ぶことにする。このとき，平面 ABC と 3 つの座標平面 yz, zx, xy 平面とのなす角をそれぞれ α, β, γ とする。（図１）

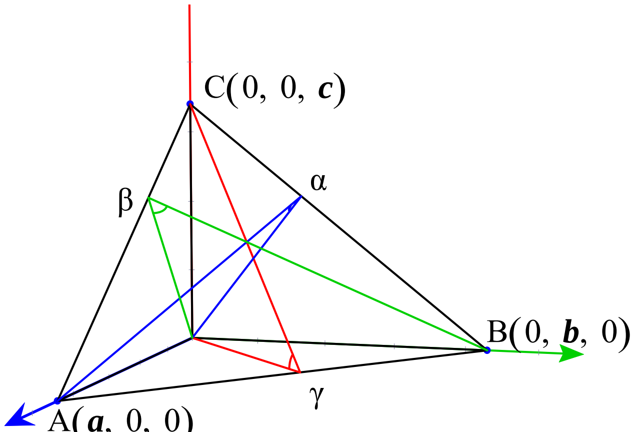

図１

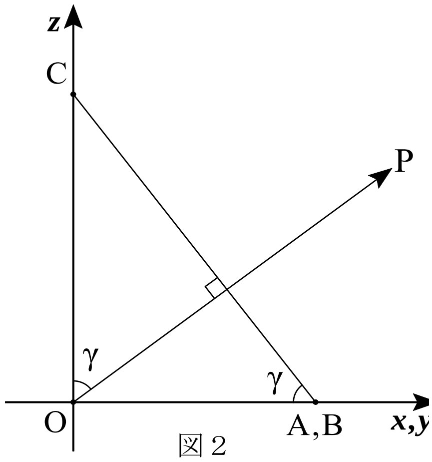

図２

この平面 ABC の法線ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする。このとき，3 つの角 α, β, γ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と各座標軸 x, y, z とのなす角 α, β, γ と一致する。（図２，３）

このとき，

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \cdots\cdots\cdots (※)$$

である。

［証明１］図３において，

$$\mathrm{OH} = \mathrm{OP}\cos\alpha,\ \mathrm{OI} = \mathrm{OP}\cos\beta,\ \mathrm{OJ} = \mathrm{OP}\cos\alpha$$

である。これらを，等式 $\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{OI}^2 + \mathrm{OJ}^2$ に代入すれば，(※) を得る。 ［証明終わり］

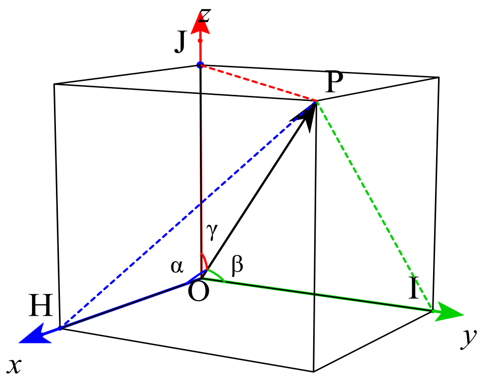

図３

ここで，図１から (※) を直接計算し，再確認してみる。

［証明２］ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ b,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a,\ 0,\ c)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のひとつは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (bc,\ ca,\ ab)$$

となる。X= $e_1 = (1, 0, 0)$, Y= $e_2 = (0, 1, 0)$, Z= $e_3 = (0, 0, 1)$ とすると，

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|} = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{ca}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{ab}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

したがって，(※) を得る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　［証明終わり］

［補足］$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向余弦と呼ぶ。すなわち，単位ベクトルの成分のこと。

［参考事項］

長さ $2a$ の線分 AB の両端が, 座標軸に接して動くとき, 線分 AB の中点の描く軌跡は,

$$x^2 + y^2 = a^2$$

である。　　　　　　　　　　　　　［証明略］

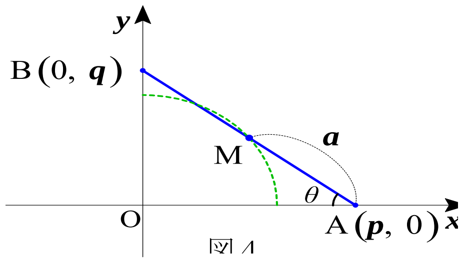

図4

［座標平面に接する円の中心の軌跡］

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2 \qquad \text{（円の半径を } r \text{ とする。）}$$

［証明］

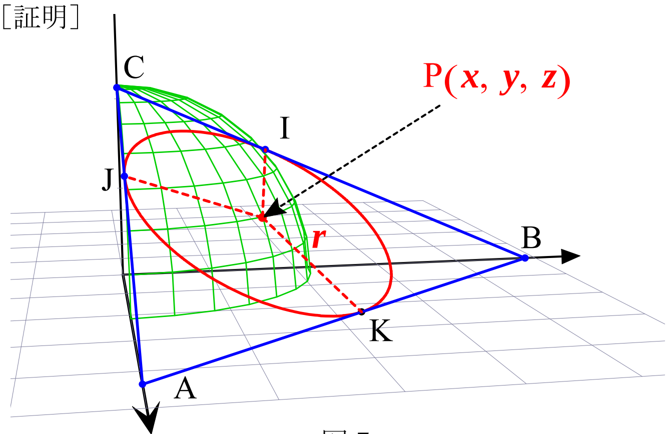

図５

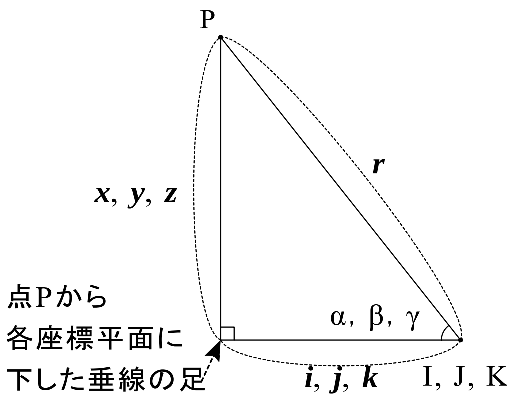

図６

円の中心 P は△ABC の内心である。（図５）点 P から，辺 BC, CA, AB へ下した垂線の足を，それぞれ I, J,K とする。（図６）３つの直角三角形の性質から，

$$\cos\alpha = \frac{i}{r}, \quad \cos\beta = \frac{j}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{k}{r}$$

$$i^2 = r^2 - x^2, \quad j^2 = r^2 - y^2, \; k^2 = r^2 - z^2$$

これらの等式を (※) に，代入する。

$$i^2 + j^2 + k^2 = r^2$$

$$(r^2 - x^2) + (r^2 - y^2) + (r^2 - z^2) = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2$$

［証明終わり］