四面体の体積および存在条件

［はじめに］

四面体の体積を表す公式は、ベクトルや座標を用いるととても簡単に表現できる。

ここでは、四面体の６辺の長さから直接、体積を表す方法を考える。

§1　ベクトルを利用して

［準備］

３次元ベクトルを考察する。座標は右手系とする。

また、$a=(a_1,a_2,a_3)$ 等と表し、$|a|=a$ と同一記号を２つの意味で使用する。

他の文字についても同様とする。

［行列と行列式について］

A,B を正方行列とする。すると

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$

である。証明は、様々な線形代数の教科書を参照のこと。

［記号］

内積　$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

外積　$[a,b]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

この外積の記号を用いれば、［準備］の右手系とは、$[e_1,e_2]=e_3$ のことである。

$([a,b],c)$ のことを三重積と呼ぶ。具体的に計算してみると、

$$([a,b],c)=\left(\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right),(c_1,c_2,c_3)\right)$$

$$=c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる。すると即次が確認できる。

$$([a,b],c)=(a,[b,c])$$

$$([a,b],c)=([b,c],a)=([c,a],b)$$

したがって、$([a,b],c)=(a,b,c)$ または、$[a,b,c]$ と表し、三重積と呼ぶ。

［性質①］

$$(a,b,c)(x,y,z)=\begin{vmatrix}(a,x) & (a,y) & (a,z)\\(b,x) & (b,y) & (b,z)\\(c,x) & (c,y) & (c,z)\end{vmatrix}$$

［証明］

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\y_1 & y_2 & y_3\\z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 & a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3 & a_1z_2+a_2z_2+a_3z_3\\ \text{略} & \text{略} & \text{略}\\ \text{略} & \text{略} & \text{略}\end{vmatrix}$$

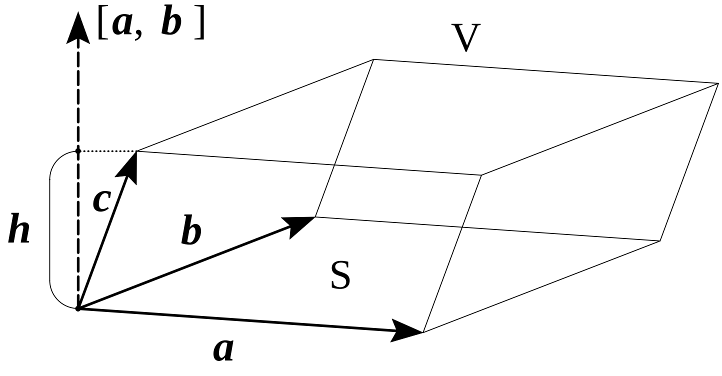
$$=\begin{vmatrix}(a,x) & (a,y) & (a,z)\\(b,x) & (b,y) & (b,z)\\(c,x) & (c,y) & (c,z)\end{vmatrix}=\text{右辺}$$

［性質②］

３つのベクトルa,b,cで張られる平行６面体の体積をVとすると、

$$V=|([a,b],c)|$$

である。



［証明］

$$([a,b],c)=|[a,b]|\cdot|c|\cdot\cos\theta$$

$$=\pm S\cdot h$$
$$=\pm V$$

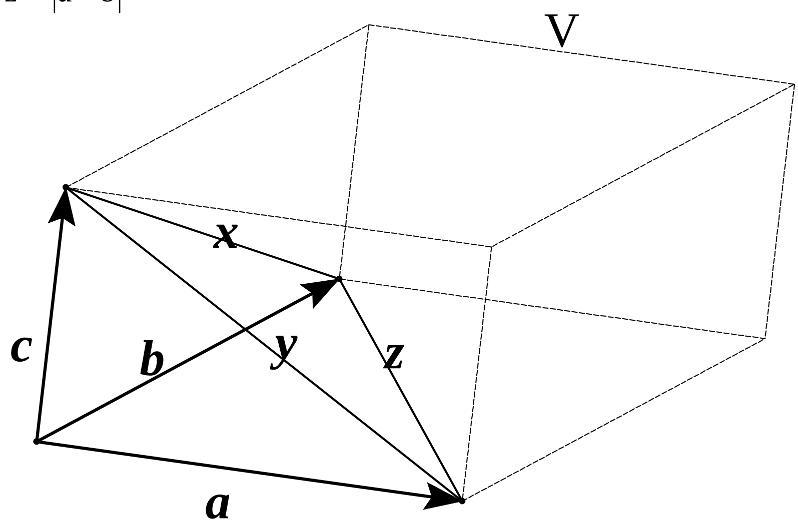
ただし、θは２つのベクトル$[a,b]$とcのなす角であり、Sは２つのベクトルaとbで張られる平行四辺形の面積である。

［性質③］

$$V^2=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-z^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-z^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

である。

ただし、$x=|b-c|$，　$y=|c-a|$，　$z=|a-b|$



［証明］

　$z=|a-b|$ より、

$$z^2=(a-b,a-b)$$
$$=a^2-2(a,b)+b^2$$

よって、

$$(a,b)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-z^2)$$

同様に、

$$(b,c)=\frac{1}{2}(b^2+c^2-x^2)\text{，}\quad (c,a)=\frac{1}{2}(c^2+a^2-y^2)$$

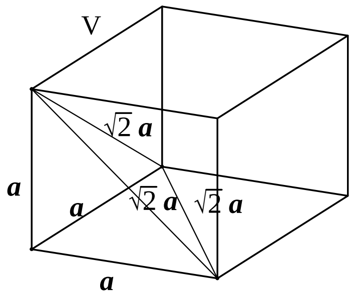
　さて、性質②より、$V=\pm(a,b,c)$ なので、性質①を用いると、

$$V^2=(a,b,c)(a,b,c)=\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & (a,b) & (c,a) \\ (a,b) & b^2 & (b,c) \\ (c,a) & (b,c) & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2+b^2-z^2) & \frac{1}{2}(c^2+a^2-y^2) \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2-z^2) & b^2 & \frac{1}{2}(b^2+c^2-x^2) \\ \frac{1}{2}(c^2+a^2-y^2) & \frac{1}{2}(b^2+c^2-x^2) & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-z^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-z^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

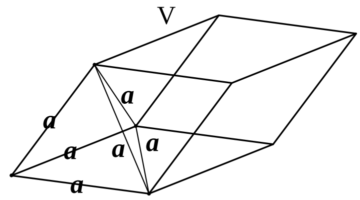
［例①］ $a = b = c$, $x = y = z = \sqrt{2}a$ のとき、



$$V^2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{vmatrix} = a^6$$

したがって、$V = a^3$ となり、１辺が a の立方体の体積を得る。

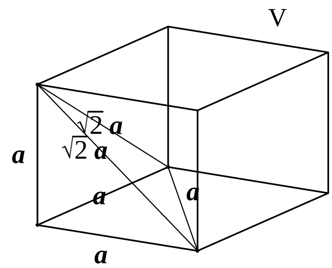
［例②］ $a = b = c = x = y = z$,のとき、



$$V^2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 & a^2 \\ a^2 & 2a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & 2a^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}a^6$$

したがって、$V = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$ となり、１辺が a の正四面体の体積 $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$ の６倍となる。

［例③］ $a = b = c = x$, $y = z = \sqrt{2}a$ のとき、

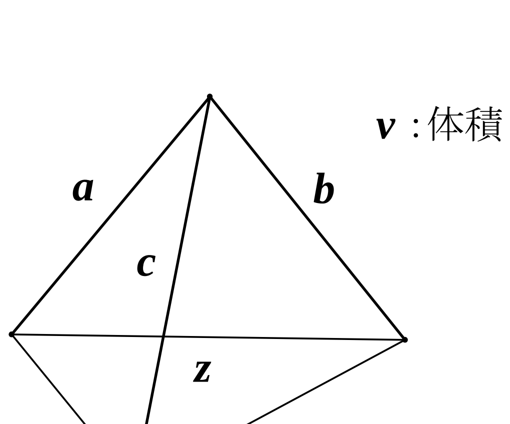


$$V^2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & a^2 \\ 0 & a^2 & 2a^2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}a^6$$

したがって、$V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$ となり、６辺が全て a の平行６面体で、２組の側面が正方形で残りの一組が菱形の立体の体積を得る。

［性質④］

右の図のような四面体の体積を v とすると、



$$v^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-z^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-z^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

となる。

［証明］

性質③と、$V = 6v$ より明らか。

［おまけ］

さて、v^2 を展開すると、どのような式になるのか、･･･とても面倒な式です。

しかし、そこには、自ずとある法則･･･当然「四面体群」で不変な式です。

であるから、「式」そのものにも、何らかの法則性が見て取れる、と予想。

以下、そのことに触れる。

計算を簡単にするため、以下$\boxed{a^2 \to a}$等と、次数を半分にして表現する。［性質④］の行列式を展開する。

$$288v^2 = \begin{vmatrix} 2a & a+b-z & a+c-y \\ a+b-z & 2b & b+c-x \\ a+c- & b+c-x & 2c \end{vmatrix}$$

$$= 8abc + 2(a+b-z)(b+c-x)(a+c-y)$$
$$\quad -2a(b+c-x)^2 - 2b(a+c-y)^2 - 2c(a+b-z)^2$$

そしてこれを展開、整理すると、

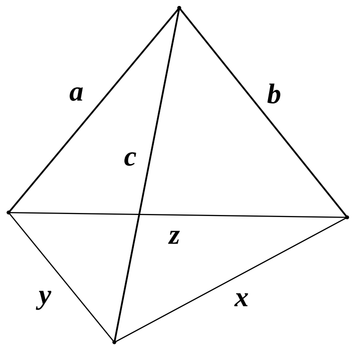
$$288v^2 = 2\{(by+cz)a + (ax+cz)b + (ax+by)c + (by+cz)x + (ax+cz)y + (ax+by)z\}$$
$$-2\{ax(a+x) + by(b+y) + cz(c+z) + abz + bcx + acy + xyz\}$$

そして、次のように２つの部分 A, B に分類すると、その差で表現できる。

$$A = (a+x)(-ax+by+cz) + (b+y)(ax-by+cz) + (c+z)(ax+by-cz)$$
$$B = abz + bcx + acy + xyz$$

と置くと、

$$\frac{1}{2} \times 288v^2 = 144v^2 = A - B$$



となり、

$$v = \frac{1}{12}\sqrt{A-B}$$

である。

次数を$\boxed{a \to a^2}$等と元に戻す。

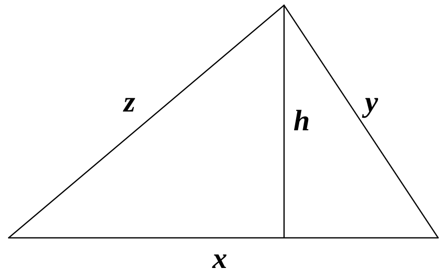
$$v = \frac{1}{12}\sqrt{\alpha - \beta}$$

$$但し、\begin{cases} \alpha = (a^2+x^2)(-a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) \\ \qquad\qquad +(b^2+y^2)(a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2) \\ \qquad\qquad\qquad +(c^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2) \\ \beta = a^2b^2z^2 + b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + x^2y^2z^2 \end{cases}$$

§2　初等幾何を利用して

　§１では、ベクトルを用いて四面体の６辺から直接に体積を求める公式を導いた。ベクトルの概念が生まれる前にも、我々は四面体を考察していた。では、直接に（初等幾何的に）求める方法は無いだろうか。以下、本質的には「ピタゴラスの定理」のみで計算してみた。

［記号］



　三辺の長さが x, y, z である三角形において、

$$f(x,y,z)=\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$$

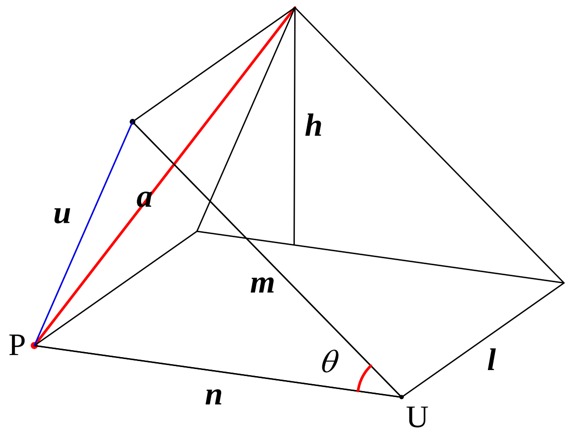
$$=\sqrt{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^4+y^4+z^4)}$$

とおくと、その面積は $S=\frac{1}{4}f(x,y,z)$ であるので、右の図のような三角形の高さ h は、

$$h=\frac{1}{2x}f(x,y,z)$$

と表される。

［準備］



　右の図のような（直）三角柱では、

$$\begin{cases} a^2=l^2+u^2 \\ u^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta \end{cases}$$

が成り立つので、

$$\cos\theta=\frac{1}{2mn}(l^2+m^2+n^2-a^2)$$

となる。したがって、

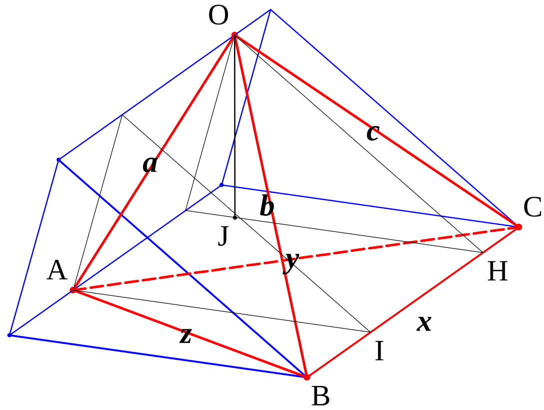
$$h=m\sin\theta=m\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2n}\sqrt{4m^2n^2-(l^2+m^2+n^2-a^2)^2}=\frac{1}{2n}\sqrt{D}$$

ただし、$D=4m^2n^2-(l^2+m^2+n^2-a^2)$ とした。

（注）簡単のため余弦定理で説明しているが、ピタゴラスの定理だけで同じ等式を得ることができる。

［本題］

（注）ここでも、文字は［準備］と同様な使い方をした。



　四面体 O-ABC を含む（直）三角柱を考える。

$$\text{OH}=\frac{1}{2x}f(x,b,c)=m$$

$$\text{AI}=\frac{1}{2x}f(x,y,z)=n$$

また、

$$\mathrm{CH}=c\cos\angle\mathrm{OCB}=c\frac{x^2+c^2-b^2}{2xc}=\frac{1}{2x}(x^2+c^2-b^2)$$

同様に、

$$\mathrm{BI}=\frac{1}{2x}(x^2+z^2-y^2)$$

よって、

$$\mathrm{HI}=\left|p-\mathrm{CH}-\mathrm{BI}\right|=\left|x-\frac{1}{2x}(x^2+c^2-b^2)-\frac{1}{2x}(x^2+z^2-y^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2x}\left|b^2-c^2+y^2-z^2\right|=l$$

を得る。したがって［準備］より、

$$\mathrm{OJ}=h=\frac{1}{2n}\sqrt{D}=\frac{x}{f(x,y,z)}\sqrt{D}$$

である。よって、四面体 O-ABC の体積を v とすると、

$$v=\frac{1}{3}(\text{底面積})(\text{高さ})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}f(x,y,z)\cdot h=\frac{x}{12}\sqrt{D}$$

つまり、

$144v^2=x^2D$　　但し、D,l,m,n は、上記の通りとする。

である。

これで、一応、体積の公式は出来たのだが、§ 1 で求めた公式と同じであることを確かめる。

［確認］

$$D=4m^2n^2-(l^2+m^2+n^2-a^2)^2$$

$$=4\left(\frac{f(x,b,c)}{2x}\right)^2\left(\frac{f(x,y,z)}{2x}\right)^2-\left(\left(\frac{b^2-c^2+y^2-z^2}{2x}\right)^2+\left(\frac{f(x,b,c)}{2x}\right)^2+\left(\frac{f(x,y,z)}{2x}\right)^2-a^2\right)^2$$

$$=\frac{1}{16x^4}\left(4f(x,b,c)^2f(x,y,z)^2-((b^2-c^2+y^2-z^2)^2+f(x,b,c)^2+f(x,y,z)^2-4a^2x^2)^2\right)$$

よって、

$$16x^4D=4f(x,b,c)^2f(x,y,z)^2-((b^2-c^2+y^2-z^2)^2+f(x,b,c)^2+f(x,y,z)^2-4a^2x^2)^2$$

すべての項が偶数乗なので、見た目の次数下げをする。以下、$\boxed{a^2\to a}$ 等と置き換えをし、$D\to D_1$ と表す。

$$16x^2D_1=4\{2(xb+bc+cx)-(x^2+b^2+c^2)\}\{2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)\}$$
$$-\{(b-c+y-z)^2+2(xb+bc+cx)-(x^2+b^2+c^2)+2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)-4ax)\}^2$$

$$=4\{-x^2+2(b+c)x-(b-c)^2\}\{-x^2+2(y+z)x-(y-z)^2)\}$$
$$-\{((b-c)^2+(y-z)^2+2(b-c)(y-z))+2(b+c+y+z)x-2x^2-(b-c)^2-(y-z)^2-4ax\}^2$$

$$=4\{x^2-2(b+c)x+(b-c)^2\}\{x^2-2(y+z)x+(y-z)^2)\}$$
$$-\{-2x^2+2(-2a+b+c+y+z)x+2(b-c)(y-z)\}^2$$

$$4x^2D_1=\{x^2-2(b+c)x+(b-c)^2\}\{x^2-2(y+z)x+(y-z)^2\}$$
$$-\{x^2-(-2a+b+c+y+z)x-(b-c)(y-z))^2\}$$

右辺を x について整理すると、4 次と定数項は無くなる。そして、両辺を x で割る。

$$4xD_1=\{-2(b+c+y+z)+2(-2a+b+c+y+z)\}x^2$$
$$+\{(b-c)^2+(y-z)^2+4(b+c)(y+z)+2(b-c)(y-z)-(-2a+b+c+y+z)^2\}x$$
$$-2(b+c)(y-z)^2-2(y+z)(b-c)^2-2(-2a+b+c+y+z)(b-c)(y-z)$$

$$=-4ax^2+(-4a^2+4ab+4ac-4bc+4ay+4by+4az+4cz-4yz)x$$
$$+4aby-4b^2y-4acy+4bcy-4by^2-4abz+4acz+4bcz-4c^2z+4byz+4cyz-4cz^2$$

$$xD_1=-ax^2+(-a^2+ab+ac-bc+ay+by+az+cz-yz)x$$
$$+aby-b^2y-acy+bcy-by^2-abz+acz+bcz-c^2z+byz+cyz-cz^2$$

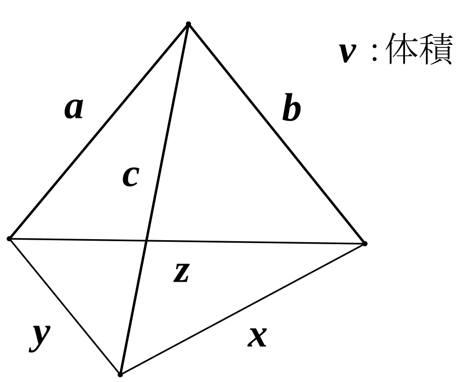
以上で、文字 x に関する降べきの順での整理が終わり、 $xD_1(=144v)$ を 6 変数で表した。

ここから、§ 1 ［おまけ］で考えた項の分類にしたがって整理する。

$$144v=-ax^2-a^2x+abx+acx-bcx+axy+bxy+axz+cxz-xyz$$
$$+aby-b^2y-acy+bcy-by^2-abz+acz+bcz-c^2z+byz+cyz-cz^2$$
$$=-ax^2-a^2x-b^2y-by^2-c^2z-cz^2$$
$$-bcx-xyz-acy-abz$$
$$+abx+acx+axy+bxy+axz+cxz+aby+bcy+acz+bcz+byz+cyz$$
$$=\{(a+x)(-ax+by+cz)+(b+y)(ax-by+cz)+(c+z)(ax+by-cz)\}$$
$$-\{abz+bcx+acy+xyz\}$$

以上で、§ 1 と同じ結論の公式を得た。

再度、最後に次数を $\boxed{a\to a^2}$ 等と、元に戻す。



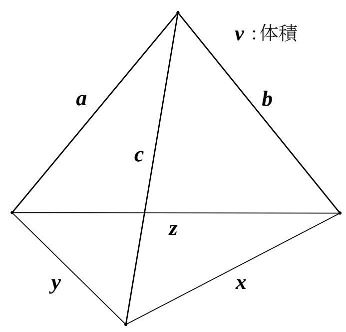
$$v=\frac{1}{12}\sqrt{\alpha-\beta}$$

但し、
$$\begin{cases}\alpha=(a^2+x^2)(-a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\ \qquad +(b^2+y^2)(a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2)\\ \qquad\qquad +(c^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2)\\ \beta=a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+x^2y^2z^2\end{cases}$$

また、計算の途中で次の等式を得た。

$$v=\frac{1}{12}x\sqrt{D}$$ 但し、D,l,m,n は、上記の通りとする。

§3　四面体の存在条件



［はじめに］

３つのベクトル a,b,c で張られる四面体の存在条件は、

「a,b,c が１次独立である」

と表現できる。

では、６つの辺の長さを用いた存在条件は何であろう。

つまり、$\boxed{６つの正の実数からなる順序対 (a,b,c,x,y,z)}$ (※) で図のような四面体を構成できるかどうか。つまり、四面体が存在するための、正の実数 a,b,c,x,y,z の条件を求める。

［前提条件］

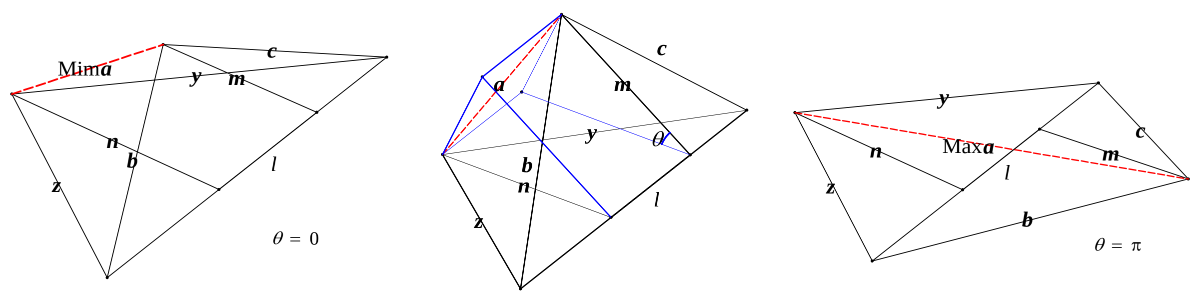
四面体の２つの三角形の存在を仮定する。

一般性を失わないで x を共通の辺とする２つの三角形の存在を仮定することができる。つまり、x,y,z と x,b,c の２つの三角形が存在していると仮定する。すなわち、

$$\begin{cases} x+y>z \\ y+z>x \\ z+x>y \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} x+b>c \\ b+c>x \\ c+x>b \end{cases}$$

［本題］

共通の辺 x で２つの三角形が角 θ をなして繋がっているとする。下の図について、両端の図は２つの三角形が同一平面内にある図であり、中央はその三角形が角 θ をなしている図である。



四面体 O-ABC の存在条件（TEC）は、辺 a の存在条件と一致する。つまり、

$$\text{TEC} \iff \text{Min}a < a < \text{Max}a$$

である。ところで、

$$\text{Min}a^2 = (m-n)^2 + l^2$$

$$\text{Max}a^2 = (m+n)^2 + l^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{TEC} &\iff (m-n)^2 + l^2 < a^2 < (m+n)^2 + l^2 \\ &\iff l^2 + m^2 + n^2 - 2mn < a^2 < l^2 + m^2 + n^2 + 2mn \\ &\iff -2mn < a^2 - (l^2 + m^2 + n^2) < 2mn \\ &\iff (l^2 + m^2 + n^2 - a^2)^2 < 4m^2n^2 \\ &\iff D > 0 \qquad \text{但し、} D = 4m^2n^2 - (l^2 + m^2 + n^2 - a^2)^2 \end{aligned}$$

となる。

また、四面体の体積をvとすると、

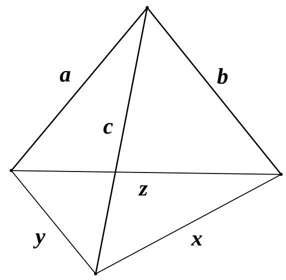
$$144v^2 = \alpha - \beta = x^2 D$$

となっている。つまり、

$$\text{TEC} \quad \Leftrightarrow \quad D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta > 0$$

したがって、四面体の存在条件の判別式は、$\alpha - \beta > 0$である。

［まとめ］



四面体が存在する条件

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{四面体の２つの面（三角形）が存在} \\ \alpha - \beta > 0 \end{cases}$$

$$\text{ただし、}\begin{cases} \alpha = (a^2+x^2)(-a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) \\ \qquad\qquad +(b^2+y^2)(a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2) \\ \qquad\qquad\qquad +(c^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2) \\ \beta = a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+x^2y^2z^2 \end{cases}$$

(※) $\boxed{\text{６つの正の実数からなる順序対}(a,b,c,x,y,z)}$についての正確な表現は次である。

３つの正の実数の組$\{a,b,c\}$に対して、もう一組の３つの正の実数の組$\{x,y,z\}$を考える。

つまり、$(\{a,b,c\},\{x,y,z\})$　但し、$\{a,b,c\}$の順序と$\{x,y,z\}$の順序は従属している。