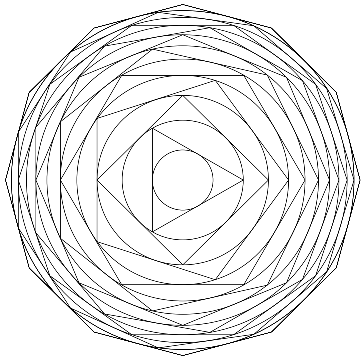
「バラの花びら」問題



中央の最も小さい半径の円 C_2 の半径を１とする

円 C_2 の外接正三角形の外接円 C_3 を描く。

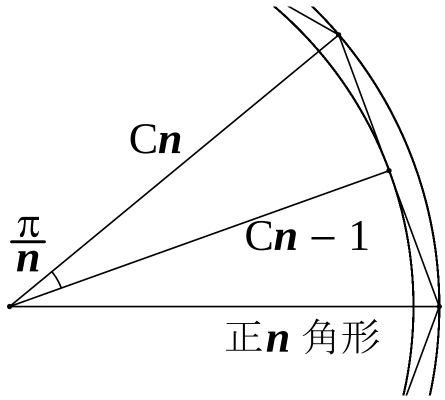
円 C_3 の外接正四角形の外接円 C_4 を描く。

円 C_4 の外接正五角形の外接円 C_5 を描く。

以下、同様に続けるとき、$N \to \infty$ とすると、C_N はどのようになるか。

別の表現をすれば、　円 C_2 の半径を１とする。 円 C_{n-1} の外接正 n 角形の外接円 C_n を描く。（$n \geq 3$）

【解説】



円 C_n の半径も、C_n で表す。すると、

$$C_2 = 1 \quad , \quad C_n = \frac{C_{n-1}}{\cos\frac{\pi}{n}} \quad (n \geq 3)$$

正 N 角形に外接する円の半径は $C_N = \dfrac{1}{\prod_{n=3}^{N} \cos\frac{\pi}{n}}$ である。

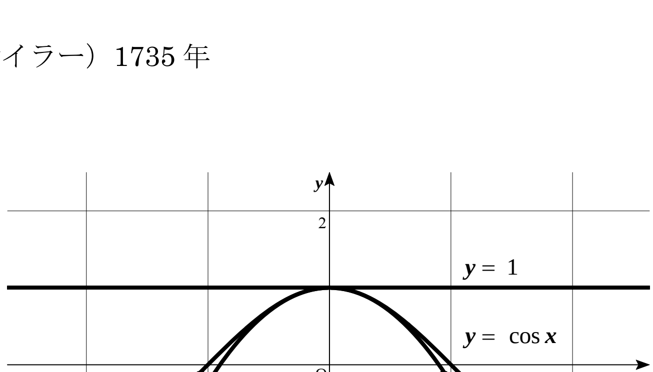
以下、C_N が発散しない事をスモールステップに分けて説明する。

§１　有名な和の確認

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler（オイラー）1735 年

§２　良く知られている大小関係より



$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$$

よって、

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \log(\cos x) < 0$$

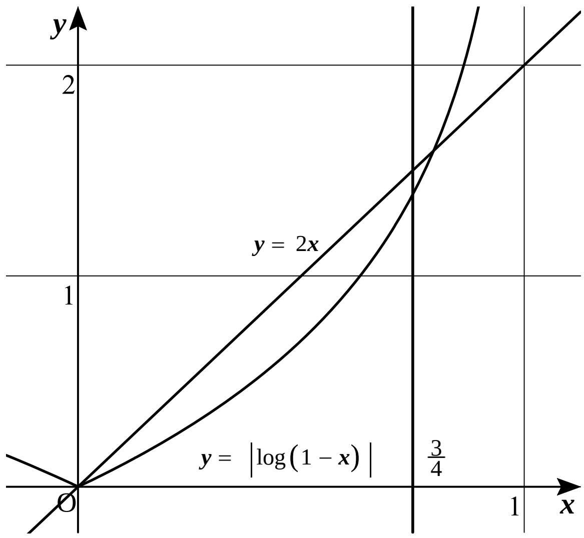
従って、

$$\left|\log(\cos x)\right| < \left|\log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right|$$

§３　グラフから明白な、大小関係より

右の図より次の不等式が成り立つ。

$$0<x<\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \left|\log(1-x)\right|<2x$$



よって、この x のかわりに $\frac{x^2}{2}$ を考えると、

$$0<\frac{x^2}{2}<\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \left|\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right|<x^2$$

を得る。

§４　$n\geq 3$ の整数 n と円周率 π に対する不等式

$n\geq 3$ のとき、$\frac{\pi}{n}\leq\frac{\pi}{3}$ なので、$\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\leq\left(\frac{\pi}{3}\right)^2<\frac{3}{2}$

よって、$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2<\frac{3}{4}$ を得る。従って、§２と§３を利用すると、

$$\left|\log\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\right|<\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

§５　$I_N=\prod_{n=3}^{N}\cos\frac{\pi}{n}$ について

$$\left|\log I_N\right|=\left|\log\left(\prod_{n=3}^{N}\cos\frac{\pi}{n}\right)\right|=\left|\sum_{n=3}^{N}\log\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\right|$$

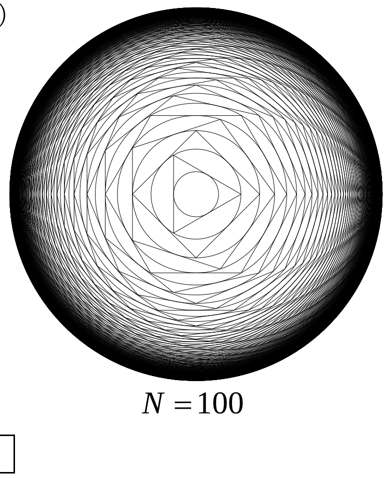
$$=\sum_{n=3}^{N}\left|\log\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\right|<\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \qquad \text{（§４を利用）}$$

$$=\pi^2\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2}<\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^4}{6} \qquad \text{（§１を利用）}$$

よって、$\log I_N>-\frac{\pi^4}{6}$ となる。つまり $e^{-\frac{\pi^4}{6}}<I_N<1$ となり、

数列｛I_N｝は（下に）有界である。（上は当然である）

従って、$N\to\infty$ のとき、$C_N=\dfrac{1}{\prod_{n=3}^{N}\cos\frac{\pi}{n}}$ は収束する。



$N=100$

「バラの花びら」の半径は無限に大きくなっていく分けではない。