ピタゴラス数のお話

愛知県立春日井東高等学校
堀部　和経

３辺の長さが３，４，５の三角形は，直角三角形です。ピタゴラス数とは，このように直角三角形の３辺の長さがすべて正の整数値である数の組のことです。

どの２つも互いに素であるような（既約）ピタゴラス数 x, y, z をすべて決定する。

$x^2+y^2=z^2$ ，$(x,y)=1$，$(y,z)=1$，$(z,x)=1$，の正の整数解は，
$\{x,y\}=\{m^2-n^2,\ 2mn\}$ ，　$z=m^2+n^2$ 　である。
但し　$(m,n)=1$，$m>n$ ，m,n の一方は偶数で他方は奇数である。（偶奇は異なる）

まず証明の準備として，次を示す。

「x, y の一方は奇数で他方は偶数である。」　$\cdots\cdots\cdots(\alpha)$

［証明］　$(x,y)=1$ より，x,y は互いに素だから，両方とも偶数ということはない。

今，x,y 共に奇数であると仮定する。

つまり，$x=2k-1, y=2l-1$（$k,l\in N$）と書けるので，

$$z^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=4(k^2+l^2-k-l)+2$$

となる。ところで，$z=2p$ または $z=2p-1$（$p\in N$）なので

$$z^2=4p^2 \text{ または } z^2=4(p^2-p)+1$$

となり矛盾する。　［証明終わり］

では、本題の［証明］です。

(α) より，一般性を失うことなく x を奇数，y を偶数とおける。

すると，$z^2=x^2+y^2$ から z は奇数となる。また，

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)\cdots\cdots\cdots①$$

と変形でき z は奇数，y は偶数であるので，$z+y$，$z-y$ は共に奇数である。

今，$z+y$，$z-y$ に（１以外の）共通因数 p（かならず奇数である）があるとすると，

$$2z=(z+y)+(z-y) \quad , \quad 2y=(z+y)-(z-y)$$

は共に奇数 p の倍数となることから，p は z と y の共通因数となり，$(y,z)=1$ に矛盾する。

したがって，$z+y$，$z-y$ は２つとも（１以外の）共通因数を持たない奇数である。

すると①式から，$z+y$ と $z-y$ は，それぞれ独立に平方数でなくてはならない。つまり，

$$z+y=k^2 \quad , \quad z-y=l^2 \quad (k, l \text{ は共に奇数，} (k,l)=1 \text{ ，} k>l)\cdots\cdots\cdots②$$

とおける。今，

$$m=\frac{k+l}{2} \quad , \quad n=\frac{k-l}{2}$$

とおくと，　m, l は自然数で $m > n$ である。そして，次の式を得る。

$k = m + n$，$l = m - n$　　　　（$m + n = k$ ：奇数より，m, n の偶奇は異なる。）

したがって，

$$z = \frac{1}{2}\{(z+y)+(z-y)\} = \frac{1}{2}\{k^2 + l^2\} = \frac{1}{2}\{(m+n)^2 + (m-n)^2\} = m^2 + n^2$$

$$y = \frac{1}{2}\{(z+y)-(z-y)\} = \frac{1}{2}\{k^2 - l^2\} = \frac{1}{2}\{(m+n)^2 - (m-n)^2\} = 2mn$$

となり，①式に代入し

$$x^2 = z^2 - y^2 = (m^2+n^2)^2 - (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 - n^2)^2$$

つまり，$x = m^2 - n^2$ を得る。

最後に，$(m, n) = c\ (> 1)$ とすると，$k = m + n$，$l = m - n$ より k, l は共通因数 c を持つ。これは，$(k, l) = 1$ に矛盾する。よって，$(m, n) = 1$　　　　［証明終わり］

（注）正の整数の組 (m, n) に対して，（既約）ピタゴラス数 $\{x, y\}; z$ が１組対応

m, n が小さな値の時のピタゴラス数の表を作りました。参考にしてください。　資料１

ところで，古代バビロニアから出土した粘土板には，楔形文字で 12709,13500,18541 というピタゴラス数が書いてあるそうです。これは，$m = 125, n = 54$ に対する x, y, z の値になっています。すごい計算力（？）ですね。　　　（足立恒夫「フェルマーの大定理」より）

［補足１］　ここで求めたピタゴラス数の式の形は，次のように簡単に見つけらます。

$x^2 + y^2 = z^2$ から，$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ と変形し，$\frac{x}{z} = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\frac{y}{z} = \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ とおけるので，$(1-t^2)^2 + (2t)^2 = (1+t^2)^2$ となる。実数 t を２つの整数 $m, n\ (m \neq 0)$ で $t = \frac{n}{m}$（有理数）

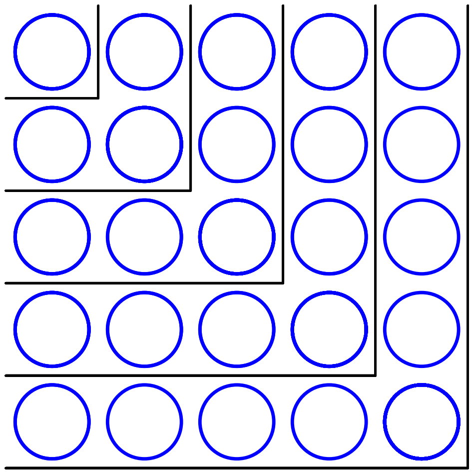
とおけば，$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^2 + \left(2\frac{n}{m}\right)^2 = \left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)^2$ から，$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$ となる。

よってピタゴラス数 $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$（m, n は任意の整数）を得る。

［補足１^2］この結果は古くから知られていて，すでに６００年ころ Brahmagupta が与えています。（岩波数学事典第２版 276 ページ）

「ピタゴラス数のお話」の続き

グノモンでピタゴラス数



右の図は，石を「グノモン」（逆さＬの字）の形に並べたモノです。左上から，グノモンで区切られた石の個数は順に

1　3　5　7　9・・・

となっています。

これを見て，

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$　……①

$1+3+5+7+9=5^2$　…②

となっているのが分かりますね。つまり，1から順に奇数を n 個たすと，n^2 となります。

つまり，$1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$ となります。

左上から，順に奇数個の石を並べていくと，いつも石は正方形の形になっているということです。このことから，奇数の列 1　3　5　7　9・・・を「四角数」と呼んでいます。

その四角数を少し別の見方をしてみると，また面白い性質が見えてきます。

上の式①，②を再度書いてみます。

$1+3+5+7=4^2$　……①

$1+3+5+7+3^2=5^2$　…②

②の式の左辺の最後の項を，$9=3^2$ と書き直して，①の左辺を消去すると，

$3^2+4^2=5^2$

となり，ピタゴラスの定理を満たす整数解がひとつ分かります。今は，1から9までの和を考えましたね。では次に，最後の項の9を25に変えた式を書いてみましょう。

$1+3+\cdots+23=12^2$　……③

$1+3+\cdots+23+25=13^2$　…④

となり，$25=5^2$ なので，③，④より，

$5^2+12^2=13^2$

を得る。以下同様に，

$1+3+\cdots+47=24^2$

$1+3+\cdots+47+49=25^2$

から，

$7^2+24^2=25^2$

を得ます。この操作は限りなく続けられますね。

一般的の，$N=2n-1\ \ (n\geq 2)$ に対して，（$N=3,5,7,\bullet\bullet\bullet$ のこと）

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+(N^2-2)=\left(\frac{N^2-1}{2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+(N^2-2)+N^2=\left(\frac{N^2+1}{2}\right)^2 \quad \cdots⑥$$

なので，$N^2+\left(\frac{N^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{N^2+1}{2}\right)^2$ となり，ピタゴラス数を見つけることができた。

以下，ここで得られたピタゴラス数はすべて異なる，つまり，無限個のピタゴラス数である事を示します。

連比を $R(N)=N:\frac{N^2-1}{2}:\frac{N^2+1}{2}$ と表せば， $N=2n-1\ \ (n\geq 2)$，$M=2m-1\ \ (m\geq 2)$ に対して， $N\neq M \quad \Rightarrow \quad R(N)\neq R(M)$

［証明］　対遇を示す。$R(N)=R(M)$ とすると，$N:\frac{N^2-1}{2}=M:\frac{M^2-1}{2}$ であるから，

$N(M^2-1)=M(N^2-1)$ を得る。整理して，$(N-M)\times(MN+1)=0$ となる。

$N\geq 3$，$M\geq 3$ より，$N=M$　［証明終わり］

「四角数」のアイデアだけで，（既約）ピタゴラス数の解を無限に得ることができました。石ころを並べるだけで，こんな事まで分かってしまうのです。……　v(^_^)v　ところで，このピタゴラス数の列は、$\boxed{\text{資料１}}$の一番上の斜めの列となっていることが確認できますね。

最後に，資料１のピタゴラス数の値を２倍，３倍，…とした値を書いた表を順に重ねるように，積んでいくイメージで，全てのピタゴラス数を網羅した表（箱？，３次元の表）が完成しますね。$\boxed{\text{資料２}}$

［補足２］　補足１で，$t=n$ とすれば，$\{n^2-1,\ 2n,\ n^2+1\}$ という系列のピタゴラス数を見つけられます。$n=2,3,4,5\bullet\bullet\bullet$ に対して $\{3,4,\ 5\},\{8,6,10\},\{15,8,\ 17\},\{\ 24,10,\ 26\}\cdots$。当然だが，表１の縦１列目の値（空欄も形式的に数値を入れたもの）になっています。

［補足３］　ガウスの（複素）整数 $Z[\,i\,]$ の中で考えると、最初の証明はぐっと楽にかけます。（高木貞治「初等整数論講義」251 ページ問題 2，参照）

資料１

	1			2			3			4			5			6			7			8		
2	3	4	5																					
3				5	12	13																		
4	15	8	17				7	24	25															
5				21	20	29				9	40	41												
6	35	12	37										11	60	61									
7				45	28	53				33	56	65				13	84	85						
8	63	16	65				55	48	73				39	80	89				15	112	113			
9				77	36	85				65	72	97										17	144	145
10	99	20	101				91	60	109										51	140	149			
11				117	44	125				105	88	137				85	132	157				57	176	185
12	143	24	145										119	120	169				95	168	193			
13				165	52	173				153	104	185				133	156	205				105	208	233
14	195	28	197				187	84	205				171	140	221									
15				221	60	229				209	120	241										161	240	289
16	255	32	257				247	96	265				231	160	281				207	224	305			

	9			10			11			12			13			14			15			16		
10	19	180	181																					
11				21	220	221																		
12							23	264	265															
13				69	260	269				25	312	313												
14	115	252	277				75	308	317				27	364	365									
15																29	420	421						
16	175	288	337				135	352	377				87	416	425				31	480	481			

縦$=m$，横$=n$，各セル$\{x,y\}=\{m^2-n^2, 2mn\}$；$z=m^2+n^2$

資料２

全ピタゴラス数の表　　$\{x, y\} = \{k(m^2 - n^2),\ 2kmn\}$; $z = k(m^2 + n^2)$

但し $(m,n) = 1$， $m > n > 0$， m,n の一方は偶数で他方は奇数である。 $k \in N$

k= 1　　n

m	1	2	3	4	5	6	7
2	3　4　5						
3		5　12　13					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

k= 2　　n

m	1	2	3	4	5	6	7
2	6　8　10						
3		10　24　26					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

k= 3　　n

m	1	2
2	9　12　15	
3		15　36　39
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

k= 4　　n

m	1	2	3	4	5	6
2	12　16　20					
3		20　48　52				
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						

k= 5　　n

m	1	2	3	4	5	6
2	15　20　25					
3		25　60　65				
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						

k= 6　　n

m	1	2	3	4	5
2	18　24　30				
3		30　72　78			
4	[illegible]		[illegible]		
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					

k= 7　　n

m	1	2	3	4	5
2	21　28　35				
3		35　84　91			
4	105　56　119		49　168　175		
5		147　140　203		63　280　287	
6	245　84　259				77　420
7		315　196　371		231　392　455	
8	441　112　455		385　336　511		273　560
9		539　252　595		455　504　679	