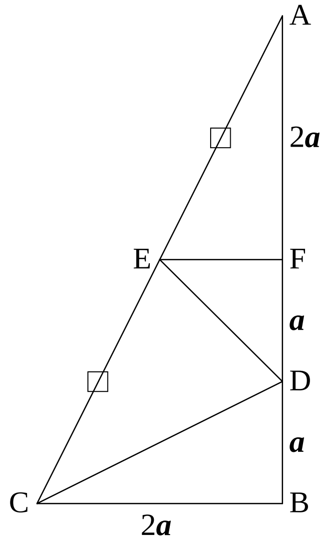
直角三角形を折り曲げて四面体を作る

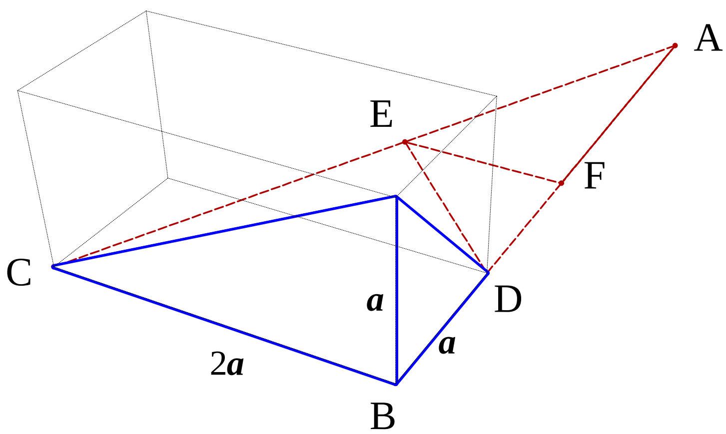
$\boxed{\text{ある県の高校入試問題、}}$（１）において、$a=5$で出題。

［1］四面体の展開図が、右のような直角三角形ＡＢＣがある。(B＝90°)
このとき、四面体の体積Ｖを求めよ。

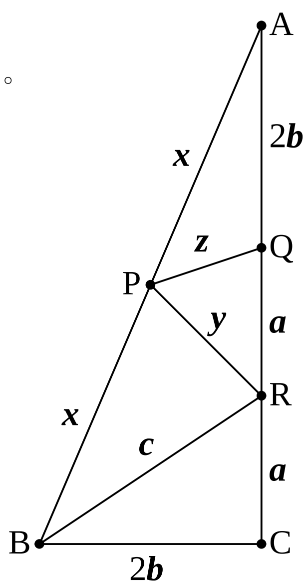


（解）図のように、ひとつの頂点に集まる３つの三角形の
内角が直角なので、

$$\boxed{V=\frac{1}{3}a^3}$$



［2］右の図のように直角三角形ＡＢＣが四面体の展開図となっている。
（C＝90°）
a,bの条件を求め、四面体の体積Ｖを求めよ。



（解）右の図より、次の関係式を得る。

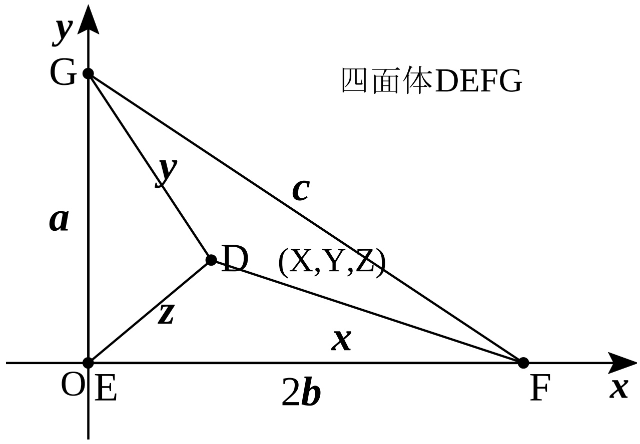
$$c^2=a^2+(2b)^2$$

$$x^2=b^2+(a+b)^2$$

$$y^2=b^2+b^2$$

$$z^2=b^2+(a-b)^2$$

四面体ＤＥＦＧの空間座標を、Ｄ(X,Y,Z), Ｅ$(0,0,0)$, Ｆ$(2b,0,0)$, Ｇ$(0,a,0)$とおく。



すると、

$$x^2=(X-2b)^2+Y^2+Z^2=b^2+(a+b)^2 \quad ・・・①$$

$$y^2=X^2+(Y-a)^2+Z^2=2b^2 \quad ・・・②$$

$$z^2=X^2+Y^2+Z^2=b^2+(a-b)^2 \quad ・・・③$$

を得るので、①－③を計算し

$$(X-2b)^2-X^2=(a+b)^2-(a-b)^2$$

$$X=b-a$$

よって、①は、$(-a-b)^2+Y^2+Z^2=b^2+(a+b)^2$ ・・・④

②は、$(b-a)^2+(Y-a)^2+Z^2=2b^2$ ・・・⑤

となり、④－⑤とすれば、

$$Y^2-(Y-a)^2=-b^2$$

$$Y=a-b$$

④より、$(a-b)^2+Z^2=b^2$ となり、$Z^2=a(2b-a)>0$ を得る。

従って、条件 $2b>a$ が四面体が存在する条件である。以下、$2b>a$ とする。

よって、$Z=\pm\sqrt{a(2b-a)}$ となる。

従って、条件 $2b>a$ の下で体積は、$\boxed{V=\frac{1}{3}ab\sqrt{a(2b-a)}}$ となる。

（補足１）

当然、$a=b$ とすれば、$\boxed{V=\frac{1}{3}a^3}$ となる。

（補足２）

計算の途中より、$X+Y=0$ となる。したがって、点Ｄは平面 $x+y=0$ 上必ず存在する。

愛知県立春日井東高等学校　堀部　和経（ほりべ　かずのり）