多面体について

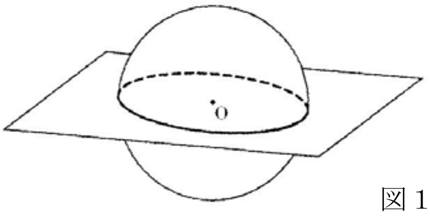
古代ギリシャの時代から多面体について，さまざまな研究がなされてきた。ここでは，球面多面体を考えることで，オイラーの定理やデカルトの定理に触れる。

［１］球面３角形・ハリオットの定理・オイラーの定理

３次元ユークリッド空間の原点を中心とする半径１の球面

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

を考える。



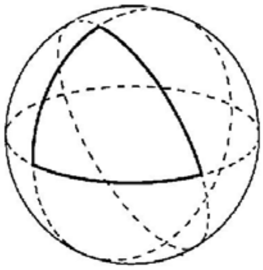


図１

原点を通る平面と球面S^2との交わりを**大円**と呼ぶ。特に，n本の大円で囲まれた図形を（球面）n角形と呼ぶ。

定理（ハリオットの定理）球面過剰公式

球面n角形に対し、その面積をA，内角を$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$とすると，

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi$$

が成り立つ。ただし，$n \geq 2$とする。

【証明】（Ⅰ）　$n=2$，$n=3$について，

・$n=2$の場合，２つの内角は等しく，それをαとする。全球面の面積4πを比例配分して，

$$\mathrm{A} = 4\pi \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

を得る。これは$n=2$の時ハリオットの定理が成り立つことが確かめられた。

図２

・$n=3$の場合，３点P, Q, Rを頂点とする球面３角形$\mathrm{PQR} = \mathrm{A}$が与えられたとする。この３頂点における内角をそれぞれα, β, γとする。また，球面S^2上の点であって，点P, Q, Rと原点に関し対称な点をそれぞれ，$\mathrm{P}', \mathrm{Q}', \mathrm{R}'$とする。さらに，２点$\mathrm{P}, \mathrm{P}'$を頂点とし△PQRを含む球面２角形を$\mathrm{T_P}$とする。$\mathrm{T_P}$の２つの内角は

α である。同様に，2つの球面2角形を$\mathrm{T_Q}, \mathrm{T_R}$をとる。このとき，$\triangle\mathrm{PQR} = \mathrm{T_P} \cap \mathrm{T_Q} \cap \mathrm{T_R}$ であることに注意し，$\triangle\mathrm{PQR} = \mathrm{T_P} \cap \mathrm{T_Q} \cap \mathrm{T_R} = \mathrm{T}$ とおくと，

$$\mathrm{T} = \mathrm{T_P} + \mathrm{T_Q} + \mathrm{T_R} - 2\triangle\mathrm{PQR} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\mathrm{A}$$

が成り立つ。一方，$S^2 \setminus \mathrm{T}$（Tの補集合）は，T自身と原点に関して対称なので，面積は等しい。したがって，$2\mathrm{T} = 4\pi$ となり，$\mathrm{A} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ を得る。

（Ⅱ） $n \geq 4$ の場合について，$2 \leq k \leq n-1$ なる k 角形に対してハリオットの定理を仮定する。与えられた n 角形（面積C）を3角形（面積A）と $n-1$ 角形（面積 B）に分割できる。

$$\begin{aligned}\mathrm{C} &= \mathrm{A} + \mathrm{B} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j - (n-3)\pi \\ &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_k - (n-2)\pi\end{aligned}$$

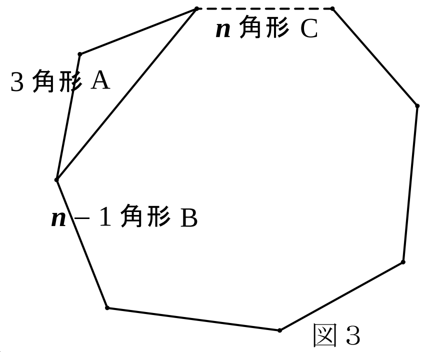


図3

※ ある番号 i, j, k で，$\gamma_k = \alpha_i + \beta_j$ となっている組が2組ある。

定理（オイラーの定理）

球面 S^2 が多角形に分割されているとする。そこに現れる頂点(vertex)，辺(edge)，面(face)の個数をそれぞれ v, e, f としたとき，常に次の等式が成り立つ。

$$v - e + f = 2$$

【証明】分割に現れる面を $F_1, F_2, \cdots, F_f$ とする。各面 $F_j\ (j = 1, 2, \cdots, f)$ は，n_j 角形で，その内角は，$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jn_j}$ 面積は A_j であるとすると，ハリオットの定理より，

$$\mathrm{A}_j = \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} - (n_j - 2)\pi$$

となり，左辺の A_j の総和は球面 S^2 の面積 4π に等しい。

$$\begin{aligned}4\pi &= \sum_{j=1}^{f} \mathrm{A}_j = \sum_{j=1}^{f} \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} - (n_j - 2)\pi \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} - \sum_{j=1}^{f} (n_j - 2)\pi \\ &= \sum_{j=1}^{f} \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} - \pi \sum_{j=1}^{f} n_j + 2\pi \sum_{j=1}^{f} 1\end{aligned}$$

第１項の $\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{n_j}\alpha_{jk}$ は，分割に現れるすべての多角形の内角の和である。まず，α_{jk} をひとつの頂点の周りで和をとると，その和は常に 2π に等しい。その頂点が全部で v 個あるのだから，

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{n_j}\alpha_{jk} = 2\pi\cdot v$$

となる。第２項の和の部分 $\sum_{j=1}^{f} n_j$ は，すべての多角形の辺の個数を辺の両側から２度数えるので，

$$\sum_{j=1}^{f} n_j = 2e$$

となる。第３項は説明不用であろう。したがって，

$$4\pi = 2\pi\cdot v + \pi\cdot 2e - 2\pi\cdot f$$

となり，$v - e + f = 2$ を得る。

［２］（多面体の頂点の）不足角・デカルトの定理

正六面体と正十二面体の頂点では，正十二面体の頂点の方が尖っていないと感じるだろう。不足角は，この頂点の尖り具合という性質を表現する値である。

具体的に，正六面体では，頂点の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ の角が３つ集まっている。したがって，その不足角 $\delta = 2\pi - 3\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

また，正十二面体では，頂点の周りに $\dfrac{3\pi}{5}$ の角が３つ集まっている。したがって，$\delta = 2\pi - 3\times\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5}$ となり，尖っている正六面体の方が不足角が大きい。

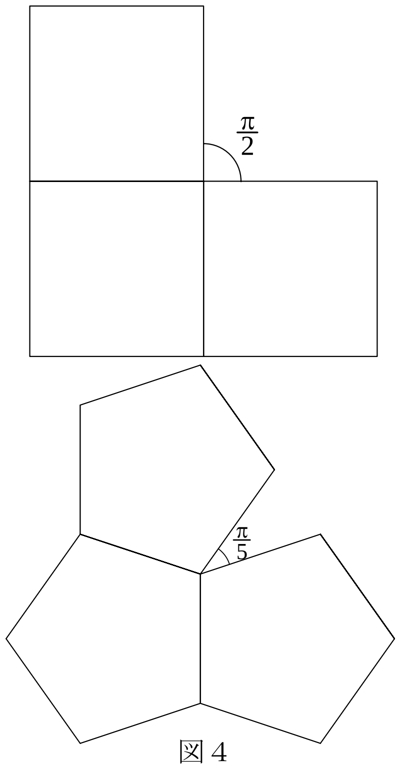


図４

多面体の頂点の不足角について

ある頂点 v_i の周りの角を $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ik_i}$ とする。その頂点 v_i の周りの角の和 $\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{ij}$ は 2π より小さい。その不足分を δ_i とする。つまり，

$$\delta_i = 2\pi - \sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{ij}\ (>0)$$

とする。

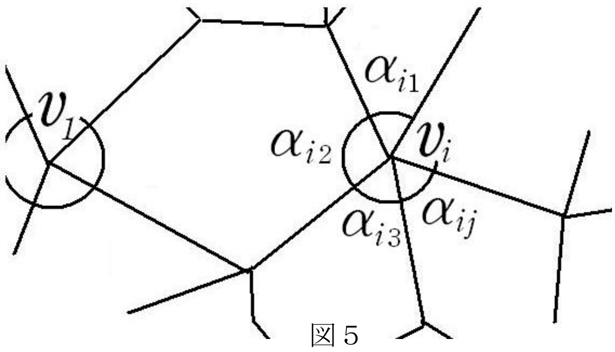


図５

定理（デカルトの定理）

多面体の頂点に集まる角の不足角の和は4π である。つまり，

$$\sum_{i=1}^{v}\delta_i = 4\pi$$

但し、多面体の頂点の数をvとする。

【証明】　多面体の頂点，辺，面の個数をそれぞれv, e, f とする。各頂点v_iに集まる辺の本数をk_iとする。頂点v_iの周りには，k_i個の面が集まっている。多面体内のある点Oから，その各面に垂線を下ろす。すると，図のように頂点v_iに集まる角α_{ij}の補角β_{ij} $\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\pi\right)\left(j=1,2,\cdots,k_i\right)$を考える。

さて、点 O を中心とする球面S^2を考えると、先ほどの補角β_{ij} $\left(j=1,2,\cdots,k_i\right)$を内角に持つ球面$k_i$角形を球面$S^2$上に考えることができる。そして、その球面$k_i$角形$\mathrm{P}_{i1}\mathrm{P}_{i2}\cdots\mathrm{P}_{ik_i}$の面積を$\mathrm{A}_i$とする。すると，ハリオットの定理より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_i &= \sum_{j=1}^{k_i}\beta_{ij} - (k_i-2)\pi \\
&= \sum_{j=1}^{k_i}\left(\pi-\alpha_{ij}\right) - (k_i-2)\pi \\
&= k_i\pi - \sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{ij} - k_i\pi + 2\pi \\
&= 2\pi - \sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{ij} \\
&= \delta_i
\end{aligned}$$

となる。

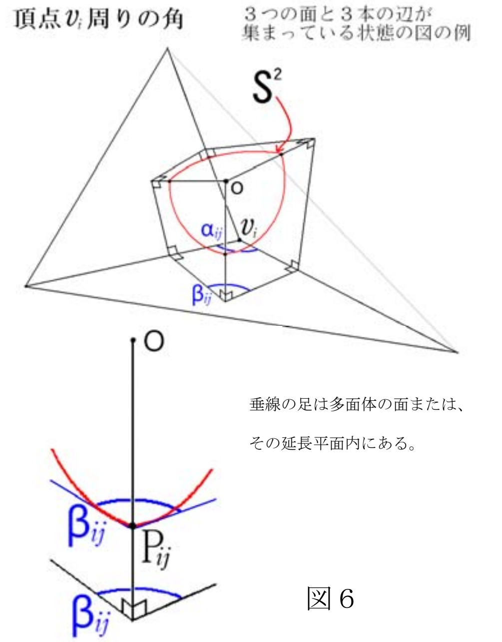


図６

いま､ある１つの頂点v_iに対し面積A_iを対応させている事に注意すれば、球面k_i角形$\mathrm{P}_{i1}\mathrm{P}_{i2}\cdots\mathrm{P}_{ik_i}$の面積$\mathrm{A}_i$を，頂点の数$\left(i=1,2,\cdots,v\right)$だけすべて集めると球面全体となることは、明らかである。したがって，

$$4\pi = \sum_{i=1}^{v}\mathrm{A}_i = \sum_{i=1}^{v}\delta_i$$

を得る。

※　元の多面体と、球面の多角形分割とを混同しないように、注意が必要である。