「πは無理数である」　２０１０年の証明

この小論は Li. Zhou, and Lubomir. Markov が 2010 年に発表された論文[1)]を基にして「πは無理数である」という証明を高校生が読める形に整えたものです。
３つの部分に分けて、解説する。

Part－1

関数 $f_n(x)=\dfrac{\left(\pi x-x^2\right)^n}{n!}$　$(n=0,1,2,3\cdots)$　について

この関数 $f_n(x)$ には $f_0(x)=\dfrac{\left(\pi x-x^2\right)^0}{0!}=1$，$f_1(x)=\dfrac{\left(\pi x-x^2\right)^1}{1!}=\pi x-x^2$

であり、次の値をとることを確認しておく。

$$f_n(0)=f_n(\pi)=0\ (n=0,1,2,3\cdots)$$

さて、$f_n(x)$,$f_{n-1}(x)$,$f_{n-2}(x)$　$(n\geq 2)$の関係を調べると,

$$f_n(x)=\frac{\pi x-x^2}{n}\cdot\frac{\left(\pi x-x^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\pi x-x^2}{n}f_{n-1}(x)$$

$$f_{n-1}(x)=\frac{\pi x-x^2}{n-1}f_{n-2}(x)\qquad\cdots\cdots①$$

である。また、微分に関して，次の等式を得る。

$$f_n{}'(x)=\frac{n(\pi-2x)\left(\pi x-x^2\right)^{n-1}}{n!}=(\pi-2x)\frac{\left(\pi x-x^2\right)^{n-1}}{(n-1)!}=(\pi-2x)f_{n-1}(x)$$

$$f_{n-1}{}'(x)=(\pi-2x)f_{n-2}(x)$$

第１の等式をもう一度微分し，第２の等式を利用することで，次の等式を得る。

$$f_n{}''(x)=-2f_{n-1}(x)+(\pi-2x)f_{n-1}{}'(x)=-2f_{n-1}(x)+(\pi-2x)^2f_{n-2}(x)\cdots\cdots②$$

Part－2

定積分 $I_n=\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx$　$(n=0,1,2,3\cdots)$　について

この値も具体的に求めてみる。　　　　　　　　　　（注意，～～～の部分は０である。）

$$I_0=\int_0^\pi f_0(x)\sin x\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=2$$

$$I_1=\int_0^\pi\left(\pi x-x^2\right)\sin x\,dx=\underline{\left[\left(\pi x-x^2\right)(-\cos x)\right]_0^\pi}+\int_0^\pi(\pi-2x)\cos x\,dx$$

$$=\int_0^\pi(\pi-2x)\cos x\,dx=\underline{\left[(\pi-2x)\sin x\right]_0^\pi}+2\int_0^\pi\sin x\,dx=2\int_0^\pi\sin x\,dx=4$$

次に，数列$\{\, I_n \,\}$の漸化式を調べてみよう。

$$I_n=\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\left[\, f_n(x)(-\cos x)\right]_0^\pi}+\int_0^\pi f_n{}'(x)\cos x\,dx$$
$$=\int_0^\pi f_n{}'(x)\cos x\,dx=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\left[\, f_n{}'(x)\sin x\right]_0^\pi}-\int_0^\pi f_n{}''(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi f_n{}''(x)\sin x\,dx$$

ここで，②および①を用いると，

$$I_n=-\int_0^\pi \left\{-2\,f_{n-1}(x)+(\pi-2x)^2\,f_{n-2}(x)\right\}\sin x\,dx$$
$$=\int_0^\pi\left\{2\,f_{n-1}(x)-\pi^2 f_{n-2}(x)+4\left(\pi x-x^2\right)f_{n-2}(x)\right\}\sin x\,dx$$
$$=2\int_0^\pi f_{n-1}(x)\sin x\,dx-\pi^2\int_0^\pi f_{n-2}(x)\sin x\,dx+4\int_0^\pi(n-1)f_{n-1}(x)\sin x\,dx$$
$$=2I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}+4(n-1)I_{n-1}=(4n-2)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}\quad(n\geq 2)$$

となり，数列$\{\, I_n \,\}$の漸化式を得る。これを用いて，$n=2,3,4$ についてI_nの値を求める。

$$I_2=(4\cdot 2-2)\,I_1-\pi^2 I_0=6\cdot 4-\pi^2\cdot 2=24-2\pi^2$$
$$I_3=(4\cdot 3-2)\,I_2-\pi^2 I_1=10\left(24-2\pi^2\right)-\pi^2\cdot 4=240-24\pi^2$$
$$I_4=(4\cdot 4-2)\,I_3-\pi^2 I_2=14\left(240-24\pi^2\right)-\pi^2\left(24-2\pi^2\right)=3360-360\pi^2+2\pi^4$$

この結果から「I_nはπの整係数の多項式として表され，その次数は高々nである。」と推定できる。以下，このことを数学的帰納法で示す。

（Ⅰ）$n=0,1$済み。（Ⅱ）n未満については成立していると仮定する。

$$I_n=(4n-2)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2}$$

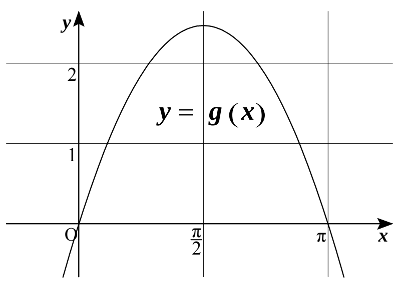
の前の項$(4n-2)\,I_{n-1}$は高々$n-1$次のπの整係数の多項式であり，後ろの項$\pi^2 I_{n-2}$は高々n次のπの整係数の多項式である。よって，I_nは高々n次のπの整係数の多項式である。

Part－3

πは無理数である

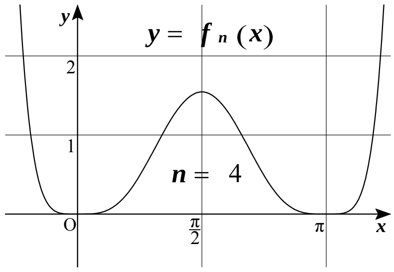
[証明]　背理法で示す。以下，$\pi=\dfrac{a}{b}$（ただし，a,bは自然数）とする。

（A）「十分大きな自然数nに対して、$0<b^n I_n<1$」となることを示す。まず、「$n\to\infty$ のとき，$b^n I_n\to 0$」を示す。



$g(x)=\pi x-x^2$とおくと，$g(x)=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$である。

区間$[0,\pi]$で$0\le g(x)$であるが$g(x)$は恒等的に 0 ではない。



さて，$0\le g(x)\le\dfrac{\pi^2}{4}$ なので，

$$0\le f_n(x)=\frac{\{g(x)\}^n}{n!}\le\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$$

であ。また区間$[0,\pi]$で，$0\le\sin x\le1$であることを考え合わせ，

この関数$f_n(x)\sin x$を区間$[0,\pi]$で定積分し，次の不等式を得る。

$$0<I_n\le\pi\times\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$$

よって，$n\to\infty$ とすると，

$$0<b^nI_n\le b^n\times\frac{a}{b}\cdot\left\{\frac{a^2}{b^2 4}\right\}^n\cdot\frac{1}{n!}=\frac{a}{b}\left\{\frac{a^2}{4b}\right\}^n\cdot\frac{1}{n!}\to0\qquad（※注意　参照）$$

なので，$b^nI_n\to0$を得る。

したがって，十分大きな自然数数nに対して、$0<b^nI_n<1$ となる。

次に，（B） b^nI_n は、整数である。

I_nは高々n次のπの多項式であるので，整数の係数$p_0,p_1,p_2,\cdots,p_n$ を持ち，

$$I_n=p_0+p_1\pi+p_2\pi^2+\cdots+p_n\pi^n$$

とかける。$\pi=\dfrac{a}{b}$ なので，

$$b^nI_n=p_0b^n+p_1ab^{n-1}+p_2a^2b^{n-2}+\cdots+p_na^n$$

となり，b^nI_n は整数である。

いま示した、（A）と（B）は矛盾している。　［証明終り］

以上で、**「πは無理数である」**ことが証明された。

※（注意）

任意の実数$a>0$に対して，$n\to\infty$ のとき$\dfrac{a^n}{n!}\to 0$である。

[証明]　$0<a\leq 1$なら明白。$2a<m$となる自然数mを定める。

いま、十分大きな自然数nに対して，

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a^m}{m!}\times\frac{a}{m+1}\times\frac{a}{m+2}\times\cdots\times\frac{a}{n} \\ &< \frac{a^m}{m!}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{a^m}{m!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\end{aligned}$$

となる。

したがって，$n\to\infty$ のとき$\dfrac{a^n}{n!}\to 0$となる。［証明終り］

愛知県立春日井東高等学校　数学科　堀部　和経　（2011/11/12）

1） Li. Zhou,　and Lubomir. Markov. Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values. The Mathematical Association of America. Monthli 117 April 2010 360-362