ユークリッドの素数定理の新証明

「素数は、無限個ある」という、ユークリッド（エウクレイデス）の証明は、簡素で力強いものだ。そして、それから、２０００年以上たった現代に、その証明法を超えたのではないかという新しい証明方法が２００６年に発見された。（American Math. Manthly, Vol 113,No.10,December 2006）

証明したのは、フィリップ・サイダック（ノース・カロライナ大学グリーンズボロ校 University of North Carolina at Greensboro）だ。

ユークリッドの証明法（現代風ですが）を書いた後、サイダックの証明を紹介する。

【定理】素数は無限個ある

ユークリッドの証明
素数は有限個で、個数は n 個であるとする。その素数をすべて書き出し $P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする。今、$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n + 1$ とおくと、P は、すべての $P_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ と異なる。更に、すべての $P_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ で、P を割ると余りは１となり、割り切れない。したがって、P は、$P_1, P_2, \cdots, P_n$ と異なる素数である。よって、素数の個数は $n+1$ 個となった。これは、素数が有限個で、個数を n 個であるとしたことに矛盾する。 故に、素数は無限個ある。　証終

サイダックの証明
N を１より大きい自然数とする。N と $N+1$ は、連続する自然数なので、互いに素である。したがって、$N_2 = N(N+1)$ は、少なくとも２つの異なる素因数をもつ。同様に、N_2 と N_2+1 は、連続する自然数であるから、$N_3 = N_2(N_2+1)$ は、少なくとも３つの異なる素因数をもつ。 この操作は、無限に続けることが可能。　証終

この証明の構造は、ユークリッドの証明に負けないほど単純だ。なぜ今まで誰も発見できなかったのか。そして、「この証明は、不思議なほど簡単で美しい。」と思いませんか。　(^_^)v

で、元の証明もとても短い

Theorem.　There are infinitely many primes.　Filip　Saidak's　proof
Let n > 1 be a positive integer. Since n and n+1 are consecutive integers, they must be coprime, and hence the number N2 = n(n + 1) must have at least two different prime factors. Similarly, since the integers n(n+1) and n(n+1)+1 are consecutive, and therefore coprime, the number N3 = n(n + 1)[n(n + 1) + 1] must have at least 3 different prime factors. This can be continued indefinitely.

参考文献　http://www.uncg.edu/~f_saidak/euclid.pdf