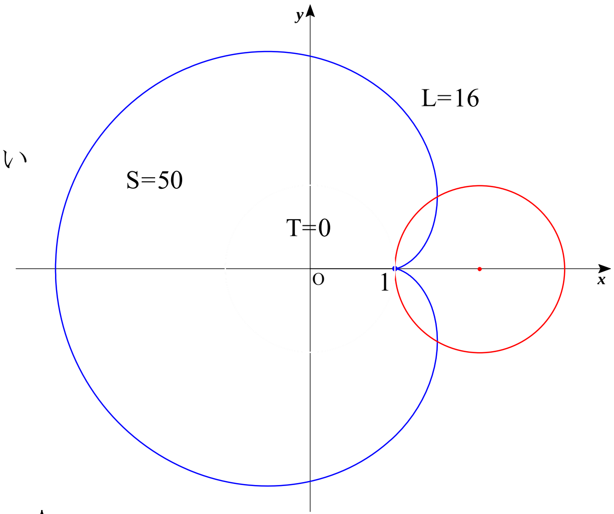
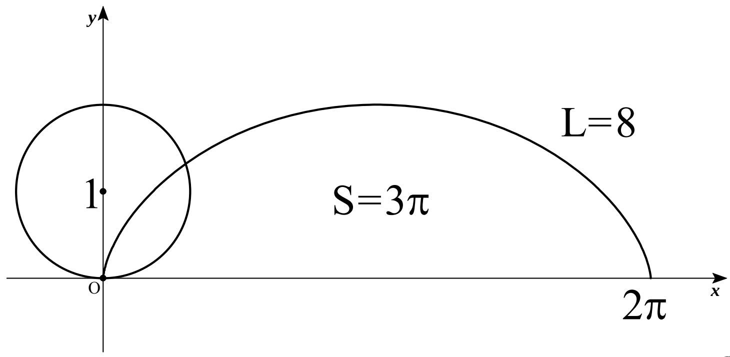
素朴なアイデアでサイクロイドなどの長さと面積を求める

微積分を用いた方法は座標・極形式などを用いた方法がいくつもありよく知られている。微積分学の成立以前にも、それらの値は知られていた。ここでは、はじめ、外（内）サイクロイドの長さ・面積を微積の力を借りて求め、サイクロイド・カージオイドに当てはめる。次いで素朴な方法でそれらを確認する。

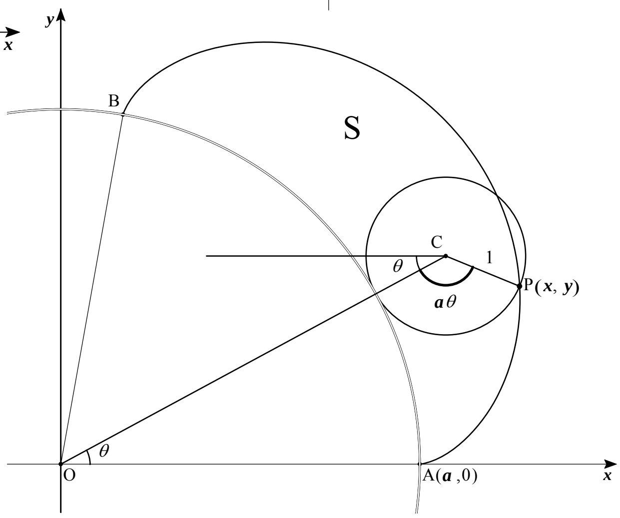
§０　サイクロイド・カージオイドの長さと面積



動円の半径が１であるサイクロイドとカージオイドについて、それぞれの長さおよび面積は、図のようである。



§１　外サイクロイドの長さと面積の計算



（１）外サイクロイドについて

定円の中心を０半径を a 、動円の半径を1とすると、

$$x=(a+1)\cos\theta-\cos((a+1)\theta)$$

$$y=(a+1)\sin\theta-\sin((a+1)\theta)$$

となる。よって、

$$\frac{dx}{d\theta}=-(a+1)\big(\sin\theta-\sin((a+1)\theta)\big)\quad,\quad\frac{dy}{d\theta}=(a+1)\big(\cos\theta-\cos((a+1)\theta)\big)$$

弧ＡＰＢの長さ L

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(a+1)^2\{1+1-2\sin\theta\sin((a+1)\theta)-2\cos\theta\cos((a+1)\theta)\}$$

$$=2(a+1)^2\{1-\cos a\theta\}$$

$$=4(a+1)^2\sin^2\frac{a\theta}{2}$$

$$L=\int_0^{\frac{2\pi}{a}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{2\pi}{a}}2(a+1)\sin\frac{a\theta}{2}\,d\theta=\left[-2(a+1)\frac{2}{a}\cos\frac{a\theta}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{a}}$$

$$=4(a+1)\frac{2}{a}=8\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

となる。

図形ＯＡＰＢＯ面積S_1

x, yは共にθで１回以上微分できる。従って、$S_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{a}}\left\{x\dfrac{dy}{d\theta}-y\dfrac{dx}{d\theta}\right\}d\theta$　である。

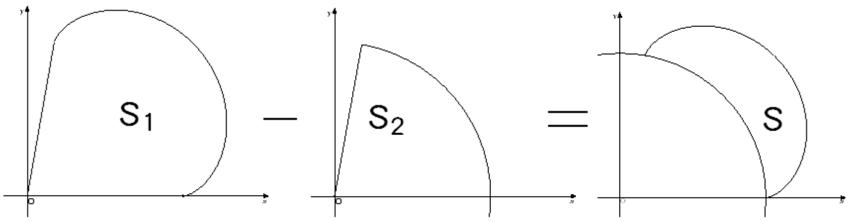
$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}&=(a+1)\big((a+1)\cos\theta-\cos((a+1)\theta)\big)\big(\cos\theta-\cos((a+1)\theta)\big)\\
&\quad+(a+1)\big((a+1)\sin\theta-\sin((a+1)\theta)\big)\big(\sin\theta-\sin((a+1)\theta)\big)\\
&=(a+1)\{(a+1)+1-(a+2)\big(\cos((a+1)\theta)\cos\theta+\sin((a+1)\theta)\sin\theta\}\\
&=(a+1)(a+2)\{1-\cos((a+1)\theta-\theta)\}\\
&=(a+1)(a+2)(1-\cos a\theta)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{a}}(a+1)(a+2)(1-\cos a\theta)d\theta=\frac{1}{2}(a+1)(a+2)\left[\theta+\frac{1}{a}\sin a\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{a}}=\frac{1}{a}(a+1)(a+2)\pi
$$

扇型ＯＡＢ面積S_2

$$
S_2=\frac{\frac{2\pi}{a}}{2\pi}\cdot\pi a^2=a\pi
$$



外サイクロイドと円Ｏの間の面積S

$$
S=S_1-S_2=\frac{1}{a}(a+1)(a+2)\pi-a\pi=\frac{1}{a}(a^2+3a+2-a^2)\pi=\left(3+\frac{2}{a}\right)\pi
$$

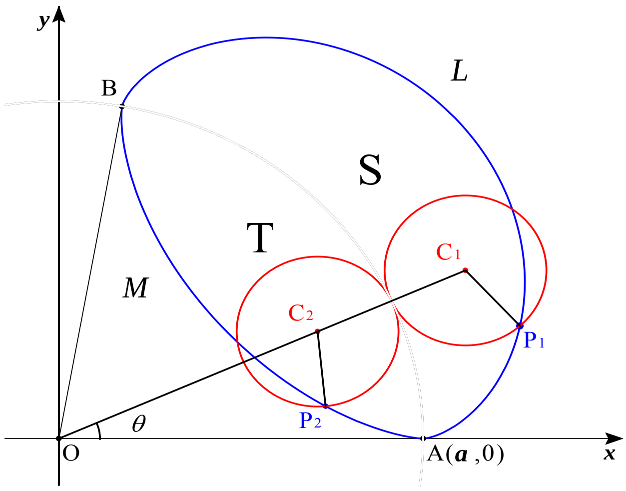
となる。

（２）$\boxed{\text{内サイクロイドについて}}$

外サイクロイドと同様に、

$$
L=8\left(1-\frac{1}{a}\right)\quad,\qquad T=\left(3-\frac{2}{a}\right)\pi
$$

となる。（詳細は参考（Ｉ））



外サイクロイドと内サイクロイドの作る図形

$$
L+M=8\left(1+\frac{1}{a}\right)+8\left(1-\frac{1}{a}\right)=16
$$

$$
S+T=\left(3+\frac{2}{a}\right)\pi+\left(3-\frac{2}{a}\right)\pi=6\pi
$$

であり、定円の半径aに従属しない。

§２　サイクロイドとカージオイドの長さと面積

（１）外サイクロイドにおいて定円の半径を $a=1$ とすれば、

$$L=8\left(1+\frac{1}{a}\right)=16 \quad , \quad S=\left(3+\frac{2}{a}\right)\pi=5\pi$$

となり、$\boxed{\text{カージオイド　の長さと面積}}$を得る。

（２）同様に、定円の半径 a を無限大とする。つまり、$a\to\infty$ とすれば、

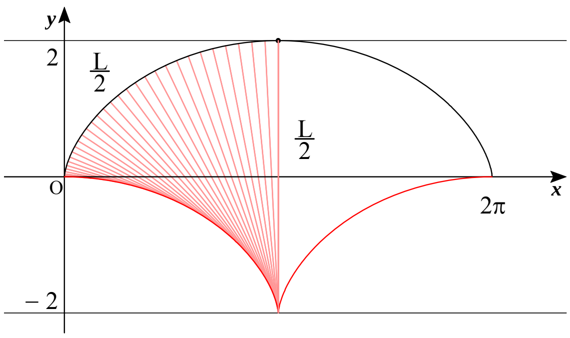
$$L=8\left(1+\frac{1}{a}\right)\to 8 \quad , \quad S=\left(3+\frac{2}{a}\right)\pi\to 3\pi$$

となり、$\boxed{\text{サイクロイド　の長さと面積}}$を得る。

§４　微分積分を使わない方法について

（１）$\boxed{\text{長さ}}$

サイクロイドの縮閉線(エボリュート, evolute)は、サイクロイドになる。したがって、サイクロイドの伸開線（インボリュート，involute）もサイクロイドである。**【注１】・・・参考の（Ⅳ）**

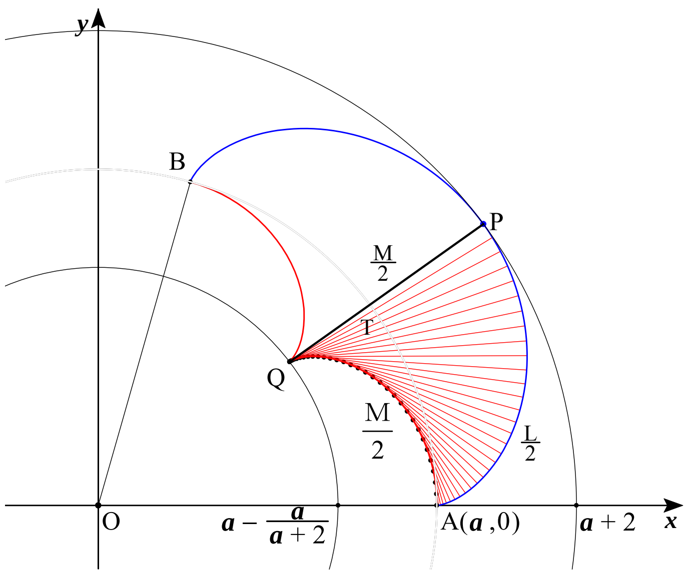


右の図で　$\dfrac{L}{2}=4$、したがって　$L=8$ となる。

さて、外サイクロイドの縮閉線は、相似な外サイクロイドになる。図のように、大小２つの外サイクロイドの長さを、それぞれ L,M とする。今、相似比は　$(a+2):a$ であるので、

$$L:M=(a+2):a$$

つまり、$L=\dfrac{a+2}{a}M$



また、線分 PO の長さを考えることにより、

$$(a+2):a=a:\left(a+2-\frac{M}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ②$$

②より

$$a^2+4a+4-\frac{1}{2}(a+2)M=a^2$$

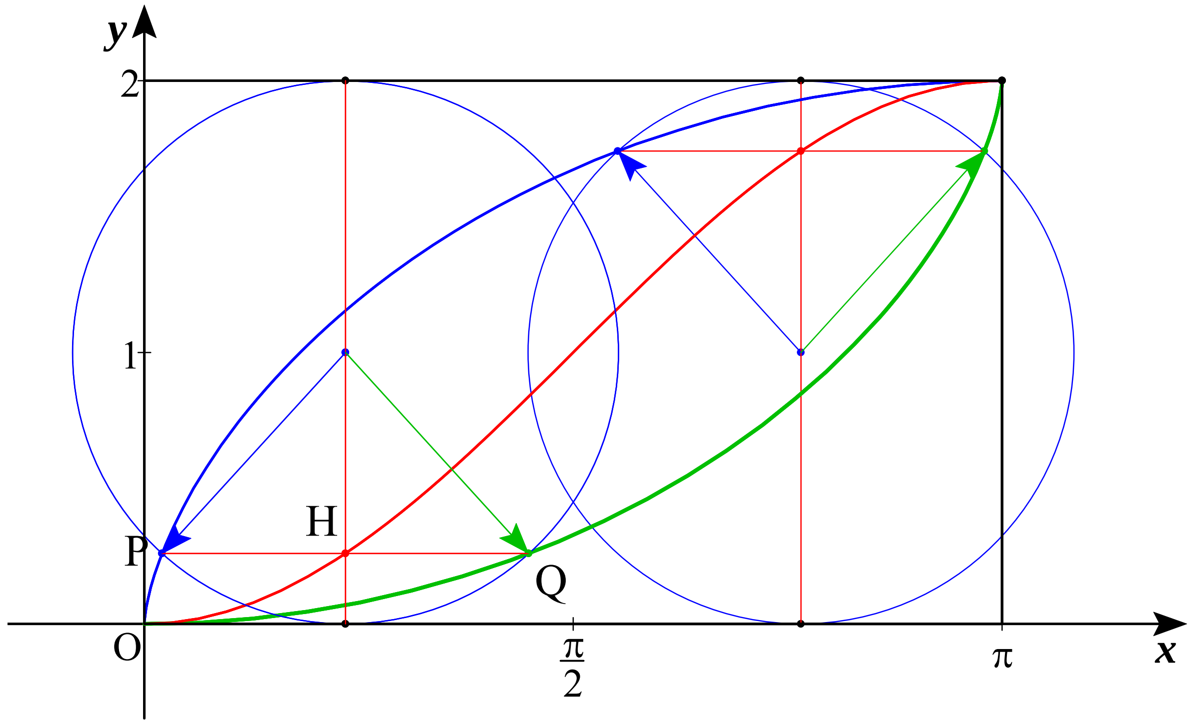
となり、$M=8\cdot\dfrac{a+1}{a+2}$ を得る。したがって、

$$L=\frac{a+2}{a}\times 8\cdot\frac{a+1}{a+2}=8\cdot\frac{a+1}{a}=8\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

となり、微積分を用いないで外サイクロイドの長さを求めることができた。

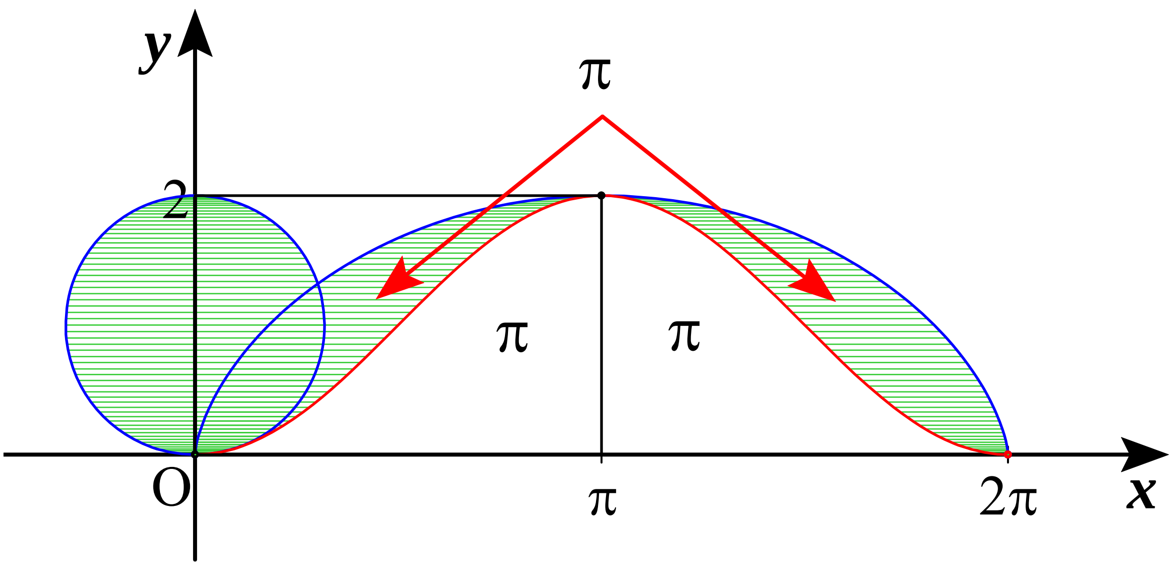
（２）$\boxed{\text{面積}}$

サイクロイドの面積



サイクロイド上の点Ｐから、y 軸に平行な動円の直径に下ろした垂線の足をＨとする。上の図より明らかに、点Ｈの軌跡は縦２、横 π の長方形を二等分する。

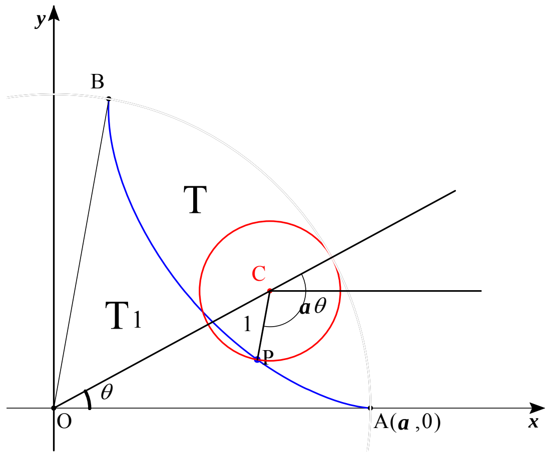
よって点Ｈの軌跡と x 軸の間の面積は、2π となる。



最後に、サイクロイドと点Ｈの軌跡の間の面積であるが、点Ｐが１回転する間の直径への垂線ＰＨの長さであるので、それは円の面積と等しい。したがって、サイクロイドと x 軸の間の面積は、3π となる。

※このみごとな論法は、ローベルバル（１６０２－１６７５）による。

参考



（Ｉ）内サイクロイドについて

定円の中心を０半径を a 、動円の半径を 1 とすると、

$$x=(a-1)\cos\theta+\cos((a-1)\theta)$$
$$y=(a-1)\sin\theta-\sin((a-1)\theta)$$

となる。

$$\frac{dx}{d\theta}=-(a-1)\bigl(\sin\theta+\sin((a-1)\theta)\bigr)\quad,\quad\frac{dy}{d\theta}=(a-1)\bigl(\cos\theta-\cos((a-1)\theta)\bigr)$$

弧ＡＰＢの長さ M

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2&=(a-1)^2\{1+1-2\sin\theta\sin((a+1)\theta)-2\cos\theta\cos((a+1)\theta)\}\\&=2(a-1)^2\{1-\cos a\theta\}\\&=4(a-1)^2\sin^2\frac{a\theta}{2}\end{aligned}$$

$$M=\int_0^{\frac{2\pi}{a}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{2\pi}{a}}2(a-1)\sin\frac{a\theta}{2}d\theta=\left[-2(a-1)\frac{2}{a}\cos\frac{a\theta}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{a}}$$

$$=-4(a-1)\left(-\frac{2}{a}\right)=8\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

図形ＯＡＰＢＯ面積 T_1

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}&=(a-1)\bigl((a-1)\cos\theta+\cos((a-1)\theta)\bigr)\bigl(\cos\theta-\cos((a-1)\theta)\bigr)\\&\quad+(a-1)\bigl((a-1)\sin\theta-\sin((a-1)\theta)\bigr)\bigl(\sin\theta+\sin((a-1)\theta)\bigr)\\&=(a-1)\bigl\{(a-1)-1-(a-2)\bigl(\cos((a-1)\theta\bigr)\cos\theta+\sin((a-1)\theta)\sin\theta\bigr\}\\&=(a-1)(a-2)\bigl\{1-\cos((a-1)\theta+\theta)\bigr\}\\&=(a+1)(a+2)(1-\cos a\theta)\end{aligned}$$

よって、

$$T_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{a}}(a-1)(a-2)(1-\cos a\theta)d\theta=\frac{1}{2}(a-1)(a-2)\left[\theta-\frac{1}{a}\sin a\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{a}}=\frac{1}{a}(a-1)(a-2)\pi$$

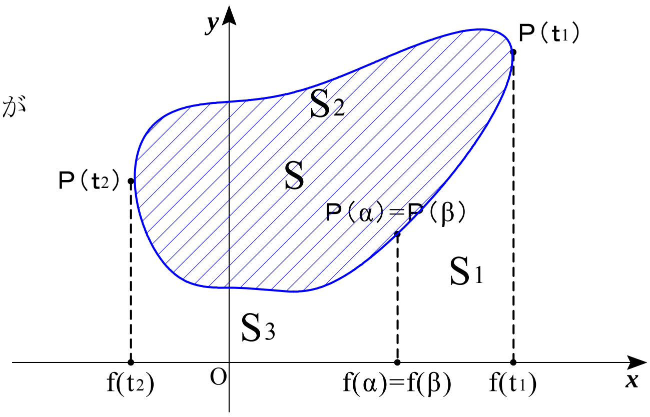
扇型ＯＡＢ面積 S_2

$$S_2=a\pi$$

内サイクロイドと円Ｏの間の面積 T

$$T=S_2-T_1=a\pi-\frac{1}{a}(a-1)(a-2)\pi=\frac{1}{a}(a^2-a^2+3a-2)\pi=\left(3-\frac{2}{a}\right)\pi$$

（Ⅱ） $\boxed{C_1\text{級の閉曲線で囲まれた図形の面積について}}$



C_1 級の閉曲線Ｌ$\left(\text{動点}\,P(x,y), x=f(t), y=g(t), \alpha \le t \le \beta\right)$が左側に囲む面積をＳとする。

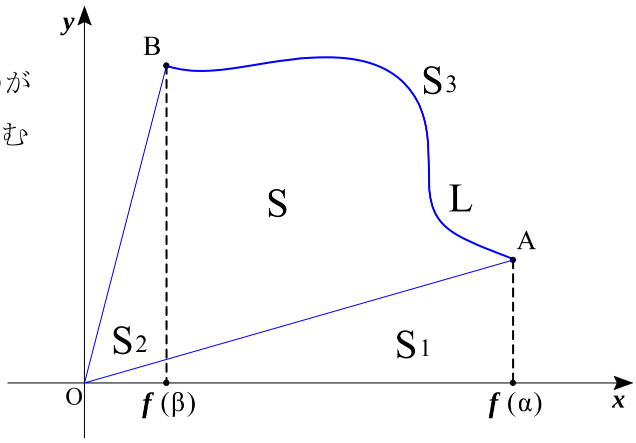
$$S_1 = \int_{f(\alpha)}^{f(t_1)} ydx = \int_{\alpha}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$S_2 = -\int_{f(t_1)}^{f(t_2)} ydx = -\int_{t_1}^{t_2} y\frac{dx}{dt}dt \quad \text{f}$$

$$S_3 = \int_{f(t_2)}^{f(\beta)} ydx = \int_{t_2}^{\beta} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$S = S_2 - S_1 - S_3 = -\int_{t_1}^{t_2} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\alpha}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{t_2}^{\beta} y\frac{dx}{dt}dt = -\int_{\alpha}^{\beta} y\frac{dx}{dt}dt$$

（Ⅲ） $\boxed{\text{ある閉曲線で囲まれた図形の面積}}$



C_1 級の曲線Ｌ$\left(\text{動点}\,P(x,y), x=f(t), y=g(t), \alpha \le t \le \beta\right)$とその両端の点Ａ$\left(f(\alpha), g(\alpha)\right)$，Ｂ$\left(f(\beta), g(\beta)\right)$と原点Ｏがり、図形ＯＡ⋃Ｌ⋃ＢＯが閉曲線となり、その左側に囲む図形の面積をＳとする。

$$S_1 = \frac{1}{2} f(\alpha)g(\alpha)$$

$$S_2 = \int_{f(\beta)}^{f(\alpha)} ydx = \int_{\beta}^{\alpha} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$S_3 = \frac{1}{2} f(\beta)g(\beta)$$

$$S = S_2 + S_3 - S_1 = \int_{\beta}^{\alpha} y\frac{dx}{dt}dt + \frac{1}{2} f(\beta)g(\beta) - \frac{1}{2} f(\alpha)g(\alpha)$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} y\frac{dx}{dt}dt - \frac{1}{2}\left[f(t)g(t)\right]_{\beta}^{\alpha}$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} y\frac{dx}{dt}dt - \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\left(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right)dt$$

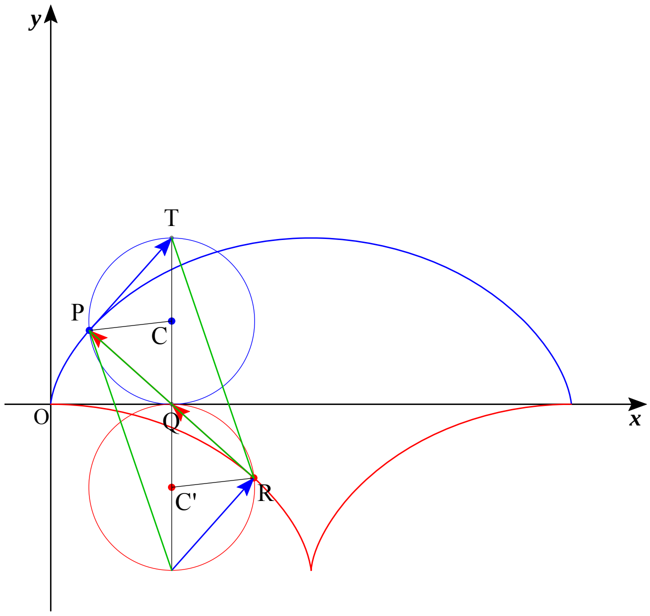
$$= \int_{\beta}^{\alpha}\left(g(t)f'(t) - \frac{1}{2} f'(t)g(t) - \frac{1}{2} f(t)g'(t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\left(g(t)f'(t) - f(t)g'(t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

(Ⅳ) インボリュートとエボリュートの説明の図　　・・・・・・　【注１】

動円Ｃを y 軸方向に -2 平行移動したものが動円Ｃ' とする。∠ＴＰＲが常に 90° となることより、点Ｒは上のサイクロイドの縮閉線である。



これらサイクロイド（外サイクロイド）の合同（相似）の証明のアイデアは大阪教育大学付属池田校舎・教諭友田勝久氏のものです。

※　参考ＵＲＬ　http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/index.html

http://horibe.jp/GrB1F.HTM