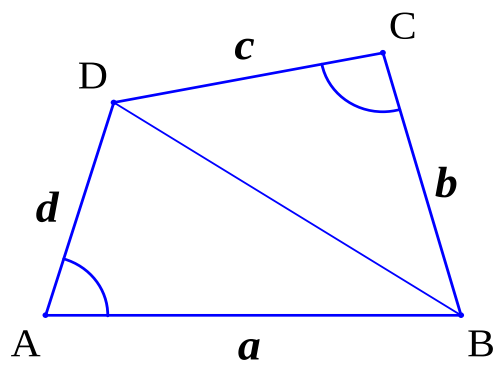
ヘロンの公式にいたる公式

①　Bretschneider（ブレッシュナイダー）の公式

四角形ABCD で、$AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d$ とし、その面積をS とすると、

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)\qquad ただし、\quad s=\frac{a+b+c+d}{2}$$

が成り立つ。



［証明］　$S=\dfrac{1}{2}ad\sin A+\dfrac{1}{2}bc\sin C$

であるから、

$$16S^2=4(ad\sin A+bc\sin C)^2\qquad\cdots①$$

となる。２つの三角形ABC とCBD において、余弦定理を用いると、

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$$
$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C$$

となり、この等式の差をとると、

$$a^2+d^2-b^2-c^2=2(ad\cos A-bc\cos C)\qquad\cdots②$$

となる。したがって①+②は、次のようになる。但し、途中から、 $A+C=2\theta$ とおく。

$$\begin{aligned}
&16S^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2\\
&\qquad=4(ad\sin A+bc\sin C)^2+4(ad\cos A-bc\cos C)^2\\
&\qquad=4\{a^2d^2+b^2c^2-2abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin C)\}\\
&\qquad=4\{a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C)\}\\
&\qquad=4\{(ad+bc)^2-2abcd-2abcd\cos 2\theta\}\\
&\qquad=4\{(ad+bc)^2-2abcd(1+\cos 2\theta)\}\\
&\qquad=4\{(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\theta\}\\
&\qquad=4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\theta\qquad\cdots③
\end{aligned}$$

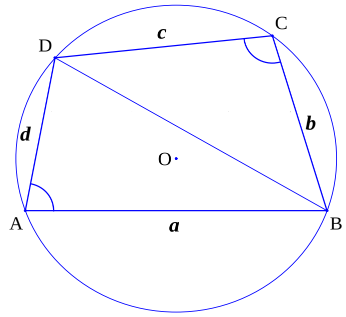
したがって、

$$\begin{aligned}
&16S^2+16abcd\cos^2\theta\\
&\qquad=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2\\
&\qquad=(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)\\
&\qquad=\{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2)\}
\end{aligned}$$

$$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$$
$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

証明終わり

②Brahmagupta（グラーマグプタ）の公式



４辺の長さが、a,b,c,d である四角形が円に内接し、その面積Ｓとすると、

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

［証明］

Bretschneider の公式を円に内接する四角形に適用すると、$A+C=180^\circ$ であるので、

$$\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)=\cos 90^\circ=0$$

を得る。したがって、

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

である。

証明終わり

③Heron（ヘロン）の公式

Brahmagupta の公式において、$d=0$ とすると、

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\qquad \text{ただし、}\quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

を得る。これがヘロンの公式である。

※　これらの一連の公式は大変美しく、また高校生でも証明を理解できるものである。

春日井高校　堀部　和経

参考文献　　幾何学大辞典（槙書店）　岩田至康編