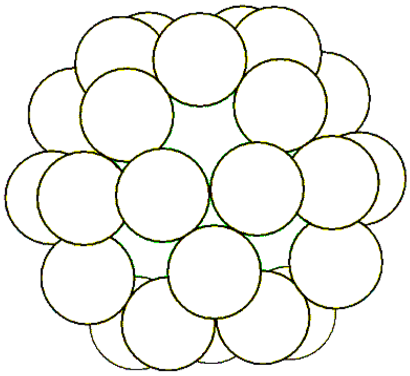
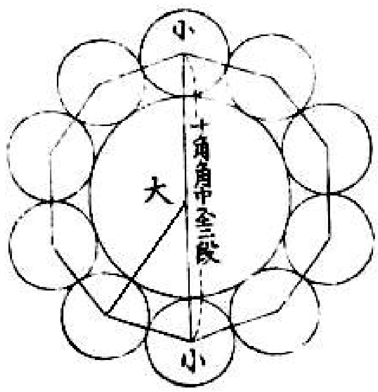
『三十個の小球と大球の径比の問題』

「算法助術」十九ノオの問題（１９の紙面の右側）

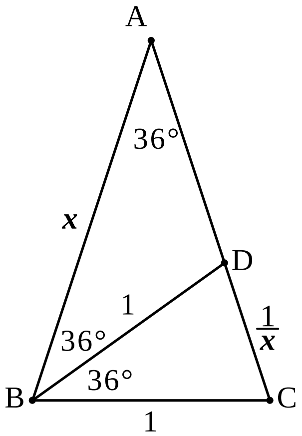
愛知県立春日井東高等学校
堀部　和経



この問題は、「算法助術」（１７９８年・天保１２年）の問題で、『大きな球を半径の等しい３０球の小さな球で囲む。ただし、小さな球は大きな球に接していると同時に、それぞれ４個の球に接している。このとき、大きな球の半径と小さな球の半径とどのような関係にあるか。』というものである。



上の図の赤道面（大球の中心を通る水平面）での断面を考える。そして、小球の中心を順次線分で結ぶと、右図のような正１０角形ができる。



断面図の中で補助線を引き、左のような二等辺三角形ＡＢＣを考える。∠Ｂの二等分線と辺ＡＣの交点をＤとする。すると、三角形ＡＢＣと相似な三角形ＢＣＤを得る。

ＢＣ：ＡＢ$=1:x$とおく。すると、

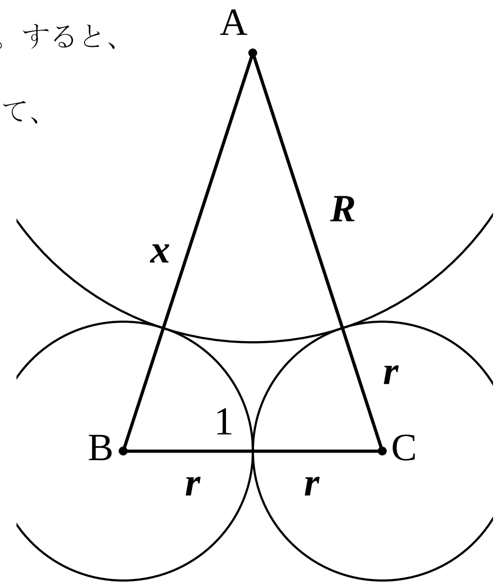
ＣＤ$=\dfrac{1}{x}$となる。したがって、

ＡＤ$=1=1-\dfrac{1}{x}$となる。整理して$x^2-x-1=0$

よって、$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\dfrac{r+R}{2r}$より、（黄金比：外中比）

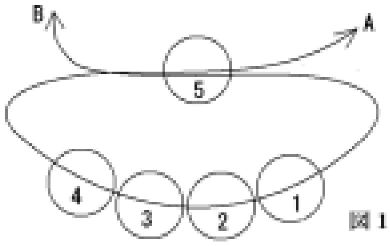
$$1+\sqrt{5}=1+\frac{R}{r}$$

$$\frac{R}{r}=\sqrt{5}$$

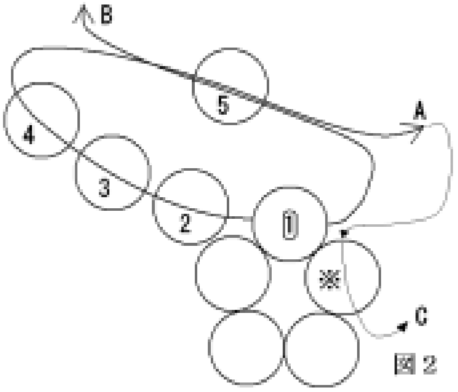


球で作る立体模型（３０球タイプ）の作り方

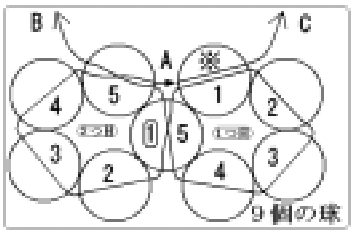
球の直径の６０倍プラスあそび（２０cm 程度）の長さのゴムを用意し､両端を穴に通しやすいように加工する。（接着剤などで固める等する。）

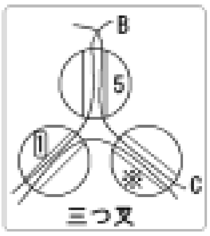


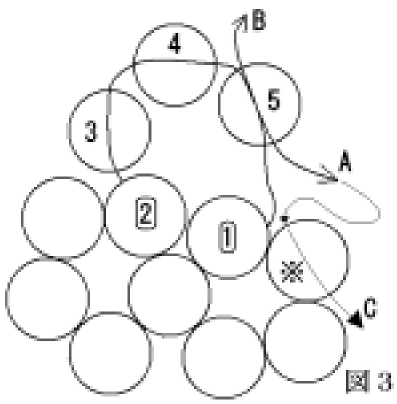
［図１］　５つの球にゴムを通す。（A）
５番目の球に反対側からゴムを通す。（B）



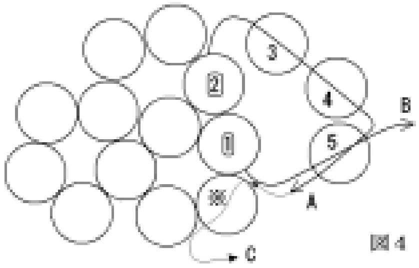
［図２］前回の５番目を、１個目とし、新たに４つの球（２，３，４，５）を加えて、５つの球でループを作るようにゴムを通す。（A，B）
　ゴム端（A）を※印の球に図のように通す。
　すると、合計９個の球で５角形状の輪が２つできあがる。







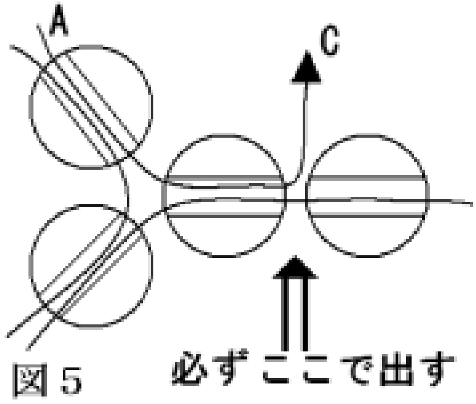
［図３］前回の※と５番目を１、２番目とし、新たに３つの球（３，４，５）を加え、５つの球でループを作るようにゴムを通す。（A，B）
　ゴム端（A）を※印の球に図のように通す。（C）
　このとき、抜き出し図のように、３つの球の穴とゴムの通り方を確認する。これは、これから完成するまで変わらない、３つの球とゴムの関係である。
　すると、合計１２個の球で５角形状の輪が３つできあがる。このとき、平面的に１２個の球が並ぶのではなく、３次元構造になっている。



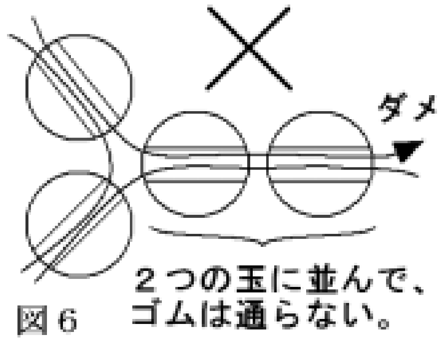
［図４］今の作業を繰り返していけばよい。
　つまり、幾つかの球を加えて、結果として５つの球で、ループ構造を作っていく。
　このことは、この立体模型完成まで同じである。

確認事項

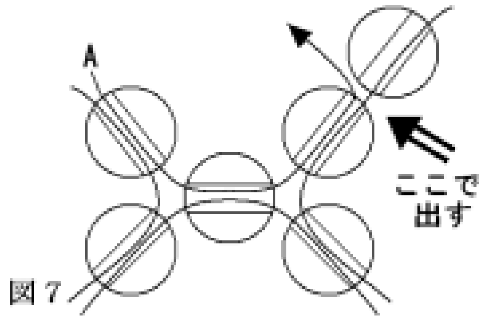
［図５］三つ叉しか出来ない。①

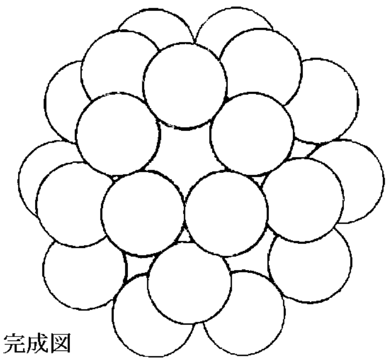


［図６］２つの球に並んで、
　　　　ゴムは通らない。②



［図７］①と②は、
　　　どういう状態になっても
　　　　　必ず守るべきルール。




完成図

［蛇足　あるいは、作成法を一番簡単に伝える方法］

　　　＜順に手に取る新しい球の数＞の列を記す。

　　　　　　　５　４　３　３　３　２

上手く作ると、ここで半分と感じる立体完成。

この時、２０個の球を使用済み。続いて、のこり１０個は、

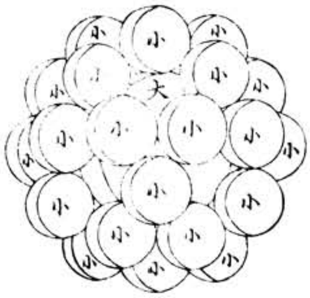
　　　　　　　３　２　２　２　１

で完成。

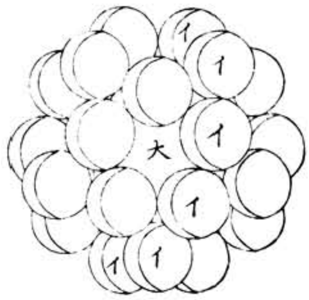
HORIBE Kazunori

※ **90** 球や、その他いろいろな数の球で綺麗な立体が編めます。面白そうでしょ。**(^o^)**

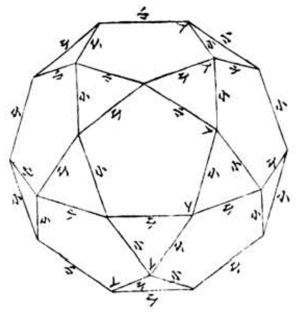
「算法助術」十九ノオ〜の問題



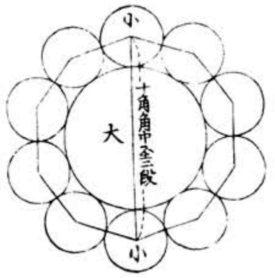
今、小球３０個を以て図のごとく大球を囲む有り。小球は各々球４個と大球とに接して隣す。小球の径３０５寸たらば、問う、大球の径、幾何(いくばく)ぞと。



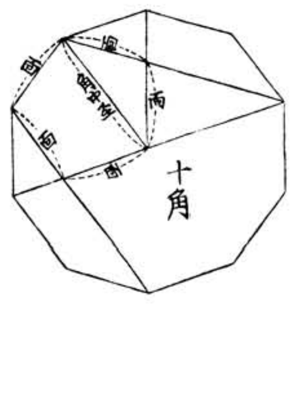
答えて曰く、大球の径６８２．０００寸余り有りと。
題図は小球３個相合う所を正面に見る図なり。又、５個相合う所を正面に見るときは左のごとし。



小球各々心より心に至るときは、五角１２個三角２０個相交わる切籠の形となる右図のごとし。



上図イ印の小球各々心に随う大球共に切るときは、その切面すなわち小円１０個をもって大円を囲む形となる左図のごとし。



右の図を考えるに、十角の角中径は五角の二距斜と全く同じ。故に、助術第三の二距斜率へ小径を乗じ角中径とす。$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ は角中径なり。これを倍して内小径を減じ余り $\sqrt{5}$ 大径とす。是(これ)によりて、答術下のごとし。

術曰く、五個を置き平方にて開き小球径を乗じ、大球径を得(う)、問いに合う。

筑後柳河　大藪俵助茂利撰

小球の径３０５寸は９．２４ｍです。小球があまりに大きい謎 ？

作題意図は、有理数近似です。つまり、現実の問題ではなく $\sqrt{5}=2.236067977\cdots$ の有理数近似の問題である。つまり、$\sqrt{5}\fallingdotseq\dfrac{682}{305}$ を言いたいのです。実際、$\dfrac{682}{305}=2.236065573\cdots$ と小数第５位まで正しい。

2010/8　愛知県立春日井東高等学校　堀部和経

三十個の球の外接問題

算法助術（天保十二年）

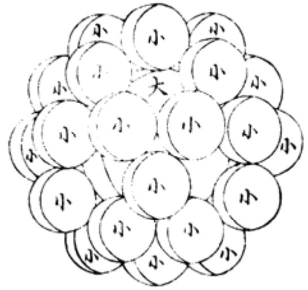
長谷川善左衛門弘閲
山本安之進賀前編

算法助術

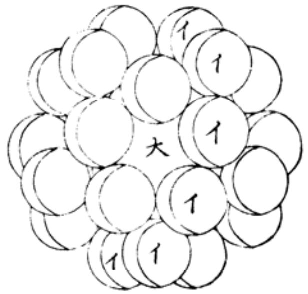
江戸中橋廣小路町　西宮彌兵衛板

今有以小球三十個如圖圍大球小球者各切鄰球四個與大球小球径三百零五寸問大球径幾何

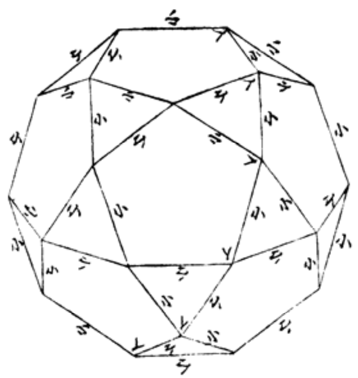
答曰大球径六百八十二寸〇〇〇有奇



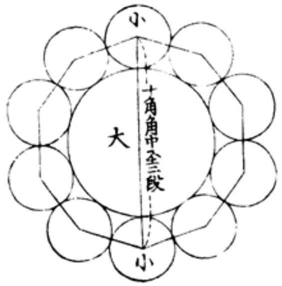
題圖ハ小球三個相併ふ所を正面ふ視る圖あり又五個相併ふ所を正面ふ視るとにハ左の如し



小球各心より心ふ至るとにハ五角一十二個三角二十個相交る切籠の形とある下圖の如し



上圖イ印の小球各心ふ隨ゝて大球供ふ截るとにハ其截面即小圓一十個を以ゝ大圓を圍む形とある左図の如し



下の圖を按るふ十角の角中径ハ五角の二距斜と全く同し故助術第三の二距斜率ヘ小径を乗し角中径とに二小五ケ商一和角中径あり是を倍して内小径を減し餘り小五ケ商大径とに是ふ依て答術左の如し

術曰置五個開平方乘小球径得大球径合問

筑後柳河　大藪俵助茂利撰